À LA RECHERCHE DU TORE PERDU

THOMAS BLOSSIER, AMADOR MARTIN-PIZARRO ET FRANK O. WAGNER

Résumé. Un groupe interprétable dans le mauvais corps vert est isogène à un quotient d'un sous-groupe définissable d'un groupe algébrique par une puissance du groupe vert. Un sous-groupe définissable d'un groupe algébrique dans un corps vert ou rouge est une extension des points colorés d'un groupe algébrique multiplicatif ou additif par un groupe algébrique. En particulier, tout groupe simple définissable dans un corps coloré est algébrique.

Introduction

La conjecture de l'algébricité des groupes simples infinis $\aleph_1$-catégoriques énoncée par Cherlin et Zilber affirme qu'un tel groupe s'interprète comme un groupe algébrique sur un corps algébriquement clos. Cette conjecture a donné naissance à une interaction entre la théorie des modèles et la théorie des groupes.

Un *mauvais groupe* serait un contre-exemple de dimension minimale à la conjecture. La dimension en question est le *rang de Morley*, c'est-à-dire le rang de Cantor-Bendixon de l'espace des types sur un modèle suffisamment saturé. Un des premiers obstacles pour la caractérisation algébrique des sous-groupes de Borel (sous-groupes définissables connexes résolubles maximaux) d'un groupe infini simple $\aleph_1$-catégorique est l'existence éventuelle d'un *mauvais corps* : un corps infini de rang de Morley fini muni d'un prédicat pour un sous-groupe multiplicatif divisible non trivial. Rappelons qu'un corps infini de rang de Morley fini est algébriquement clos et que, dans le langage pur des anneaux, le rang de Morley équivaut à la dimension de Zariski.

L'existence d'un mauvais corps en caractéristique positive est improbable [20]. En caractéristique nulle, Poizat [16] a utilisé la construction par amalgamation développée par Hrushovski [10, 11] pour introduire un corps de rang $\omega \cdot 2$ avec un prédicat pour un sous-groupe multiplicatif de rang ω. Ce corps a été ensuite collapsé pour obtenir un mauvais corps [2]. Dans le même article, Poizat a également construit un corps de caractéristique positive avec un prédicat pour un sous-groupe additif infini d'indice infini, collapsé dans [3]. Ce travail faisait suite à sa construction [15] d'un corps avec un prédicat pour un sous-ensemble algébriquement indépendant, collapsé dans [1]. Poizat nomme les prédicats *vert*, *rouge* et *noir* respectivement. Les corps ainsi obtenus (collapsés ou non) s'appellent donc les corps *colorés*.

Date: 19 janvier 2015.

2010 *Mathematics Subject Classification.* 03C45.

Key words and phrases. Model Theory, Amalgamation methods, Flatness, Interpretation, Groups.

Recherche conduite dans le cadre du projet ANR-09-BLAN-0047 MODIG ainsi que ANR-13-BS01-0006 ValCoMo.

L'étude systématique des groupes définissables dans les corps colorés a été entamée dans [6]. Il découle du [6, Théorème 5.7] que tout groupe définissable connexe G dans un corps coloré s'envoie par un morphisme définissable ϕ dans un groupe algébrique, tel que la composante connexe du noyau est incluse dans le centre de G. Tout groupe simple définissable est ainsi linéaire. Par [17], aucun mauvais groupe n'est définissable dans un corps rouge collapsé et un mauvais groupe définissable dans un corps vert collapsé serait un groupe linéaire constitué uniquement d'éléments semi-simples.

Puisque les corps de rang de Morley fini éliminent les imaginaires, on peut remplacer *définissable* par *interprétable* pour les corps collapsés. Néanmoins, le résultat précédent ne donne aucune information sur les groupes abéliens. En particulier, on ne peut traiter ainsi le quotient du groupe multiplicatif par le sous groupe coloré.

Dans la troisième partie de cet article (théorème 3.14), nous donnons une caractérisation des groupes définissables dans les corps verts collapsés.

Théorème A. *Un groupe interprétable dans un corps vert collapsé est isogène à un quotient d'un sous-groupe définissable d'un groupe algébrique par un sous-groupe central qui est lui isogène à une puissance cartésienne du sous-groupe multiplicatif vert.*

On utilise à plusieurs reprises le fait que les sous-groupes multiplicatifs définissables connexes sont des tores, qui sont définissables sans paramètres. La preuve de ce théorème ne s'applique donc pas directement au cas rouge collapsé, où l'on doit traiter les sous-groupes additifs donnés par des p-polynômes.

Le théorème A nous amène naturellement à étudier, dans les corps colorés, les sous-groupes définissables d'un groupe algébrique. Dans le cas du corps noir non-collapsé, Poizat montre que tout groupe définissable est algébrique [15, Proposition 2.4]. Ceci reste vrai (voir la conclusion du même article page 1354) pour les sous-groupes définissables de groupes algébriques dans le cas collapsé. Dans la quatrième partie, qui est indépendante du théorème A, nous caractérisons les sous-groupes d'un groupe algébrique, définissables dans un corps vert (théorème 4.2) ou rouge (théorème 4.3), collapsé ou non.

Théorème B. *Dans un corps vert (resp. rouge), tout sous-groupe définissable connexe G d'un groupe algébrique a un sous-groupe normal algébrique N, tel que le quotient G/N est définissablement isomorphe (resp. définissablement isogène) à une puissance cartésienne du sous-groupe multiplicatif vert (resp. au sous-groupe rouge d'un groupe algébrique additif).*

Ainsi, tout groupe simple définissable dans un corps coloré est algébrique (corollaire 4.4). En particulier, par élimination des imaginaires, le mauvais corps construit dans [2] n'interprète pas de mauvais groupe.

Dans la dernière partie, on étudie les groupes définissables dans une fusion de deux théories fortement minimales avec la propriété de la multiplicité définissable (DMP) par amalgame de Hrushovski [10]. Cette construction a été généralisée [22] au cas de structures de rang fini avec la DMP. Notons qu'un corps coloré peut aussi être considéré comme une telle fusion. Hrushovski a construit ces fusions pour deux théories fortement minimales ayant comme réduit commun l'égalité (cas du corps noir) ; dans le cas où le réduit commun est un espace vectoriel sur un corps fini (cas du corps rouge), cette construction a été réalisée dans [4]. Dans le cas où le réduit commun est un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ (celui du corps vert), une telle fusion n'a pas encore été construite en général.

Hrushovski a affirmé que tout groupe définissable dans la fusion fortement minimale de deux théories fortement minimales sur l'égalité est isogène à un produit direct de deux groupes, chacun définissable dans l'une des théories initiales. Il n'en a pas donné de preuve, et seulement une esquisse se trouve dans [8, Claim 3.1]. En nous inspirant de la preuve qu'aucun groupe infini n'est définissable dans une théorie plate [10, Section 4.2], nous donnons (théorème 5.5) une démonstration complète de ce résultat, valable pour la fusion libre ou collapsée.

Théorème C. *Dans une fusion sur l'égalité de deux théories fortement minimales avec la DMP, tout groupe définissable est, modulo un noyau fini, isomorphe à un produit direct de groupes interprétables dans les théories de base.*

1. Préliminaires

Dans cette partie, nous rappelons des résultats portant sur les groupes stables qui seront utilisés par la suite. Nous renvoyons le lecteur à [14] ou [13, Chapter 1 Part 6] pour une introduction aux groupes stables.

Définition 1.1. Soit G un groupe stable. Étant donnés un ensemble A de paramètres et un élément g de G, le *stabilisateur* (à gauche) de g dans G sur A est le sous-groupe défini par

$$\mathrm{Stab}(g/A) = \{h \in G \ : \ \exists\, x \models \mathrm{stp}(g/A)\ (\, hx \models \mathrm{stp}(g/A)\ \wedge x \mathop{\perp}_{A} h\,)\}.$$

Notons que $\mathrm{Stab}(g/A) = \mathrm{Stab}(g/B)$ si $g \perp_A B$. De plus, si $h \in \mathrm{Stab}(g/A)$ et $g' \models \mathrm{stp}(g/A)$ avec $g' \perp_A h$, par stationnarité on conclut que $hg' \models \mathrm{stp}(g/A)$ et $hg' \perp_A h$.

Le lemme suivant est dû à Ziegler dans le cas abélien [21, Theorem 1].

Lemme 1.2. *Soit H un groupe type-définissable dans une théorie stable et h, h' dans H tels que h, h' et hh' sont deux-à-deux indépendants sur un ensemble A. Alors les stabilisateurs à gauche satisfont*

$$\mathrm{Stab}(h/A) = \mathrm{Stab}(hh'/A) = h\,\mathrm{Stab}(h')h^{-1}\,;$$

ils sont connexes, et h est générique dans le translaté $\mathrm{Stab}(h/A)h$*, qui est définissable sur* $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)$ *; de même pour h' et hh'.*

Démonstration. Nous travaillons sur $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)$. En remplaçant le rang de Morley par chaque rang local stratifié D [18, Definition 2.1.6 et Corollary 2.2.5] dans la preuve de [14, Lemme 2.3], il suffit d'abord de vérifier l'inégalité $D(\mathrm{Stab}(h)) \geq D(h)$. Remarquons que

$$D(h') = D(h'/h) = D(hh'/h) = D(hh') = D(hh'/h') = D(h/h') = D(h).$$

Soit $h_2 \models \mathrm{tp}(h'/hh')$ avec $h_2 \perp_{hh'} h$. Puisque $h' \perp hh'$, on a $h_2 \perp hh'$ et donc $h_2 \perp h, h'$; alors $h \perp h'$ donne $h \perp h', h_2$ et

$$h \perp h'h_2^{-1}.$$

Comme $h', hh' \equiv h_2, hh'$, on a $h', h \equiv h_2, hh'h_2^{-1}$. En particulier,

$$hh'h_2^{-1} \equiv h.$$

On a donc $h'h_2^{-1} \in \mathrm{Stab}(h)$. Ainsi

$$D(\mathrm{Stab}(h)) \geq D(h'h_2^{-1}) \geq D(h'h_2^{-1}/h_2) = D(h'/h_2) = D(h') = D(h).$$

On voit facilement que

$$\mathrm{Stab}(hh') = \mathrm{Stab}(hh'/h') = \mathrm{Stab}(h/h') = \mathrm{Stab}(h)$$

et

$$\mathrm{Stab}(hh') = \mathrm{Stab}(hh'/h) = h\,\mathrm{Stab}(h'/h)h^{-1} = h\,\mathrm{Stab}(h')h^{-1}. \quad \square$$

Remarque 1.3. Ce lemme se généralise au cas où H est hyperdéfinissable dans une théorie simple, avec la notion de stabilisateur correspondante aux théories simples sur la clôture bornée $\mathrm{bdd}(A)$. On obtient que $\mathrm{Stab}(hh') = \mathrm{Stab}(h)$ est commensurable à un conjugué de $\mathrm{Stab}(h')$.

Définition 1.4. Soient G et H deux groupes type-définissables. Un sous-groupe type-définissable S de $G \times H$ est une *endogénie* de G dans H si
— la projection sur G est un sous-groupe G_S d'indice borné, et
— le *co-noyau* $\mathrm{coker}(S) = \{h \in H : (1,h) \in S\}$ est fini.
Une endogénie induit donc un morphisme de G_S dans $N_H(\mathrm{coker}(S))/\mathrm{coker}(S)$. Une *isogénie* de G vers H est une endogénie de noyau $\ker(S) = \{g \in G : (g,1) \in S\}$ fini et dont l'image (la projection sur H) est d'indice borné dans H.

Lemme 1.5. *Soient G et H deux groupes type-définissables dans une théorie stable et C un translaté type-définissable sur A d'un sous-groupe $S \leq G \times H$. Supposons qu'il existe un générique (g,h) sur A du translaté C tel que $h \in \mathrm{acl}(A,g)$. Alors S définit une endogénie de $\pi_1(S)$ dans H, où π_1 dénote la projection sur G. Si de plus g et h sont interalgébriques sur A, alors l'endogénie est une isogénie de $\pi_1(S)$ vers $\pi_2(S)$, où π_2 dénote la projection sur H.*

Démonstration. Supposons que C est un translaté à droite de S. Soit $(g',h') \models \mathrm{stp}(g,h/A)$ avec $g',h' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_A g,h$. Alors $(g'g^{-1}, h'h^{-1})$ est générique dans S et indépendant de g',h' sur A. Comme $h'h^{-1} \in \mathrm{acl}(A,g,g')$, on a $h'h^{-1} \in \mathrm{acl}(A,g'g^{-1},g')$ et donc $h'h^{-1} \in \mathrm{acl}(A,g'g^{-1})$ car $h'h^{-1} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_{A,g'g^{-1}} g'$. En particulier, le co-noyau $\mathrm{coker}(S)$ est fini et S est une endogénie de $\pi_1(S)$ vers $\pi_2(S)$. Si $g \in \mathrm{acl}(A,h)$, on obtient par symétrie que $\ker(S)$ est fini. $\square$

Remarque 1.6. Si g est générique dans un sous-groupe $G_1 \leq G$ type-définissable sur A, alors $\pi_1(S)$ est d'indice borné dans G_1 et S définit une endogénie de G_1 dans $\pi_2(S)$. Enfin si h est générique dans un sous-groupe $H_1 \leq H$, alors $\pi_2(S)$ a indice borné dans H_1.

Remarque 1.7. Si G, H et S sont hyperdéfinissables dans une théorie simple, on obtient un résultat analogue en remplaçant, dans les définitions d'endogénie et d'isogénie, fini par borné.

Jusqu'à la fin de cette partie, on considère une théorie stable T avec un réduit T_0, ce réduit ayant élimination géométrique des imaginaires. On utilisera l'indice 0 pour indiquer des notions modèle-théoriques prises au sens du réduit T_0, comme la clôture algébrique ou l'indépendance. Puisque l'on travaille avec un réduit, la clôture algébrique dans T sera prise au sens réel. Rappelons que l'indépendance au-dessus d'un ensemble A algébriquement clos implique la 0-indépendance sur A

[6, Lemme 2.1]. La proposition suivante donne un critère pour montrer qu'un sous-groupe connexe type-définissable d'un groupe T_0-type-définissable est lui-même T_0-type-définissable.

Proposition 1.8. *À l'intérieur d'un groupe T_0-type-définissable, on considère un translaté C d'un sous-groupe connexe type-définissable S sur un ensemble algébriquement clos de paramètres réels A. Soit p le type générique de C sur A et notons p_0 son T_0-réduit. Si p est de rang maximal (par rapport au rang de Morley, de Lascar ou aux rangs locaux stratifiés) parmi les complétions de p_0 (vu comme T-type partiel), alors S est d'indice borné dans le 0-stabilisateur $\mathrm{Stab}_0(p_0)$, qui est son enveloppe T_0-type-définissable. Si p est l'unique complétion de p_0 de rang maximal et est stationnaire, alors S est T_0-type-définissable.*

Démonstration. Comme les hypothèses de la proposition se préservent par extension des paramètres, en prenant un représentant du translaté de S, on peut se réduire au cas où p est le générique de S.

Remarquons que $S = \mathrm{Stab}(p) \subseteq \mathrm{Stab}_0(p_0)$, puisque l'indépendance implique la 0-indépendance. Comme S est un sous-groupe connexe A-invariant qui contient p, l'enveloppe T_0-type-définissable $\bar{S}$ est aussi un sous-groupe connexe A-invariant et contient p_0. Donc, il contient $\mathrm{Stab}_0(p_0) \subseteq p_0 p_0^{-1}$. Il suit que $\bar{S} = \mathrm{Stab}_0(p_0)$, qui est alors 0-connexe. En particulier, le type p_0 est l'unique 0-type générique de $\bar{S}$.

Rappelons qu'une formule est générique dans un groupe stable si un nombre fini de ses translatés recouvre ce groupe. Ainsi, une 0-formule est générique pour $\bar{S}$ (au sens de T_0 comme au sens de T) si et seulement si elle l'est dans p_0. Les types génériques de $\bar{S}$ sont donc précisément les complétions de p_0 de rang maximal.

Ainsi, si p est de rang maximal parmi les complétions de p_0, alors p est générique pour $\bar{S}$, ce qui entraîne que l'indice de S dans $\bar{S}$ est borné. Si de plus p est l'unique complétion de rang maximal de p_0, alors p est l'unique type générique de $\bar{S}$, qui est donc connexe (au sens de T) et égal à S. □

Pour terminer ces préliminaires, on rappelle un fait qui sera utilisé à plusieurs reprises par la suite. Soient G un groupe connexe type-définissable sur $\emptyset$ dans T, et a et b deux génériques indépendants de G.

Fait 1.9. [6, Lemme 3.4 et Remarque 3.5] Après adjonction au langage des éléments d'une suite de Morley D du générique de G au-dessus de a, b, on pose

$$\begin{aligned} a_1 &= \mathrm{acl}_0(\mathrm{acl}(b), \mathrm{acl}(ab)) \cap \mathrm{acl}(a), \\ b_1 &= \mathrm{acl}_0(\mathrm{acl}(a), \mathrm{acl}(ab)) \cap \mathrm{acl}(b), \\ (ab)_1 &= \mathrm{acl}_0(\mathrm{acl}(a), \mathrm{acl}(b)) \cap \mathrm{acl}(ab). \end{aligned}$$

Alors a_1, b_1 et $(ab)_1$ sont indépendants deux-à-deux, chacun est 0-algébrique sur les deux autres, et de plus

$$\mathrm{acl}(b), \mathrm{acl}(ab) \underset{a_1}{\overset{0}{\downarrow}} \mathrm{acl}(a).$$

Nous allons en déduire une variante de [6, Theorem 3.1] qui est plus explicite sur l'image du morphisme. Rappelons que le préfixe $*$ indique que le nombre de variables est infini.

Théorème 1.10. *Soit G un groupe connexe type-définissable sur $\emptyset$ dans une théorie stable T qui a un réduit T_0 éliminant géométriquement les imaginaires. Alors il* *existe un ensemble A de paramètres algébriquement clos et un homomorphisme définissable ϕ^* de G vers un groupe T_0-$*$-interprétable H^* sur A, tel que pour chaque couple de génériques indépendants a et b de G sur A on ait*

$$\operatorname{acl}(b,A),\operatorname{acl}(ab,A) \mathop{\downarrow}^{0}_{\phi^*(a),A} \operatorname{acl}(a,A).$$

De plus, s'il existe un homomorphisme définissable ϕ de G dans un groupe T_0-interprétable sur un ensemble B algébriquement clos tel que pour un générique a de G sur B, le 0-rang de Lascar $U_0(\phi(a)/B)$ est maximal et fini, alors pour tout $C \supseteq B$ algébriquement clos, on a

$$\operatorname{acl}(b,C),\operatorname{acl}(ab,C) \mathop{\downarrow}^{0}_{\phi(a),C} \operatorname{acl}(a,C),$$

pour chaque couple de génériques indépendants a et b de G au dessus de C.

Démonstration. Prenons trois génériques indépendants a, b et c de G sur une suite D de Morley du générique de G et posons

$$a_1 = \operatorname{acl}_0(\operatorname{acl}(b,D),\operatorname{acl}(ab,D)) \cap \operatorname{acl}(a,D).$$

Comme $a, b, ab \equiv_D^{stp} a^{-1}, c^{-1}, (ca)^{-1}$, on a

$$a_1 = \operatorname{acl}_0(\operatorname{acl}(c,D),\operatorname{acl}(ca,D)) \cap \operatorname{acl}(a,D).$$

Pour $b_1, (ab)_1, c_1, (ca)_1$ et $(cab)_1$ définis de manière analogue, le fait 1.9 implique que le 6-uple $(a_1, b_1, c_1, (ab)_1, (ca)_1, (cab)_1)$ est un quadrangle 0-algébrique ; le théorème de configuration de groupe [9] (voir aussi [7] ou [13, Theorem 5.4.5 et Remark 5.4.9]), dont la preuve reste valable pour les uples infinis, donne l'existence d'un groupe T_0-$*$-interprétable 0-connexe H_0^* sur un ensemble algébriquement clos $A_0 \supseteq D$ de paramètres indépendant de a, b, c sur D. Par transitivité, on a $a, b, c, D \mathop{\downarrow} A_0$. De plus, les uples a_1 et b_1 sont respectivement 0-interalgébriques avec des 0-génériques h et h' de H_0^* sur A_0, et $(ab)_1$ est 0-interalgébrique avec hh' sur A_0. Comme a, b et ab sont deux-à-deux indépendants sur A_0, les couples

$$(a,h), \qquad (b,h') \qquad \text{et} \qquad (ab,hh')$$

les sont aussi. D'après le lemme 1.5 et la remarque 1.6, le stabilisateur $\operatorname{Stab}(a,h/A_0)$ définit une endogénie ϕ_0^* de G dans H_0^*. On peut supposer que ϕ_0^* est un homomorphisme, en remplaçant H_0^* par $N_{H_0^*}(\operatorname{coker}(\phi_0^*))/\operatorname{coker}(\phi_0^*)$, qui est également T_0-$*$-interprétable. Notons que les trois couples ont même type sur A_0. Ainsi (a,h) est générique dans $\operatorname{Stab}(a,h/A_0)$, et $\phi_0^*(a) = h$.

Comme $A_0 \mathop{\downarrow} a, b, c, D$ implique $A_0 \mathop{\downarrow}^0 \operatorname{acl}(a,b,c,D)$ d'après [6, lemme 2.1], et donc $A_0 \mathop{\downarrow}^0_{a_1} \operatorname{acl}(a,b,c)$, l'indépendance

$$\operatorname{acl}(b),\operatorname{acl}(ab) \mathop{\downarrow}^{0}_{a_1} \operatorname{acl}(a) \quad \text{donne} \quad \operatorname{acl}(b),\operatorname{acl}(ab) \mathop{\downarrow}^{0}_{a_1,A_0} \operatorname{acl}(a).$$

Par 0-interalgébricité, on obtient

$$\operatorname{acl}(b),\operatorname{acl}(ab) \mathop{\downarrow}^{0}_{\phi_0^*(a),A_0} \operatorname{acl}(a).$$

Par récurrence, on construit une suite $(A_n, H_n^*, \phi_n^* : n < \omega)$ avec les propriétés suivantes (en posant $A_{-1} = \emptyset$) :

— l'ensemble $A_n \supseteq A_{n-1}$ est algébriquement clos et indépendant de a, b, c,

— le groupe H_n^* et l'homomorphisme $\phi_n^* : G \to H_n^*$ sont T_0-$*$-interprétables sur A_n,
— on a l'indépendance

$$\mathrm{acl}(b, A_{n-1}), \mathrm{acl}(ab, A_{n-1}) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}^{0}_{\phi_n^*(a), A_n} \mathrm{acl}(a, A_{n-1}).$$

Posons $A = \bigcup_{n<\omega} A_n$, $H^* = \prod_{n<\omega} H_n^*$ et $\phi^* = \prod_{n<\omega} \phi_n^* : G \to H^*$. Puisque chaque formule dans $\mathrm{tp}(\mathrm{acl}(b, A), \mathrm{acl}(ab, A)/\mathrm{acl}(a, A))$ n'utilise qu'un nombre fini de paramètres et ne dévie donc pas sur $\phi_n^*(a), A_n$ pour n suffisamment grand, on conclut que

$$(\dagger) \qquad \mathrm{acl}(b, A), \mathrm{acl}(ab, A) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}^{0}_{\phi^*(a), A} \mathrm{acl}(a, A).$$

Supposons maintenant que ϕ soit un homomorphisme interprétable de G vers un groupe T_0-interprétable H sur un ensemble B algébriquement clos tel que pour a générique dans G sur B le 0-rang de Lascar $U_0(\phi(a)/B)$ soit maximal et fini. Pour $C \supseteq B$ algébriquement clos, construisons, comme précédemment et au-dessus de C, un homomorphisme définissable ϕ^* de G vers un groupe T_0-$*$-interprétable H^* sur A ($\supseteq C$). Par stabilité, le groupe H^* est une limite projective $\varprojlim \pi_i(H^*)$, où chaque $\pi_i(H^*)$ est un groupe T_0-interprétable. Si a, b sont deux génériques indépendants de G sur A, alors $\phi(a) \in \mathrm{acl}(a, A)$, $\phi(b) \in \mathrm{acl}(b, A)$ et $\phi(ab) \in \mathrm{acl}(ab, A)$. Ainsi l'indépendance ($\dagger$) donne

$$\phi(a) = \phi(ab) \cdot \phi(b)^{-1} \in \mathrm{acl}(a, A) \cap \mathrm{acl}_0(\mathrm{acl}(b, A), \mathrm{acl}(ab, A)) = \mathrm{acl}_0(\phi^*(a), A).$$

Il existe donc i tel que $\phi(a) \in \mathrm{acl}_0((\pi_j \circ \phi^*)(a), A)$ pour tout $j \geq i$. Inversement, comme $(\phi, \pi_j \circ \phi^*)$ est aussi un homomorphisme interprétable de G vers un groupe T_0-interprétable, on a

$$U_0(\phi(a)/A) \leq U_0(\phi(a), (\pi_j \circ \phi^*)(a)/A) \leq U_0(\phi(a)/A)$$

par maximalité du rang. Ainsi $U_0((\pi_j \circ \phi^*)(a)/\phi(a), A) = 0$ pour tout $j \geq i$, et $\phi^*(a) \in \mathrm{acl}_0(\phi(a), A)$, ce qui donne

$$\mathrm{acl}(b, A), \mathrm{acl}(ab, A) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}^{0}_{\phi(a), A} \mathrm{acl}(a, A).$$

Puisque $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|} a$ on a $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}_C \mathrm{acl}(a, C)$, et donc $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}^0_C \mathrm{acl}(a, C)$ par [6, lemme 2.1]. Alors $\phi(a) \in \mathrm{acl}(a, B) \subseteq \mathrm{acl}(a, C)$ implique

$$\phi(a), A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}^{0}_{\phi(a), C} \mathrm{acl}(a, C),$$

et par transitivité

$$\mathrm{acl}(a, C) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}^{0}_{\phi(a), C} \mathrm{acl}(b, C), \mathrm{acl}(ab, C). \quad \square$$

2. Die liebe Farbe

Dans cette partie nous rappelons quelques propriétés du mauvais corps obtenu dans [2] qui seront utilisées pour la démonstration du théorème A. Il s'agit d'un corps K algébriquement clos de caractéristique nulle muni d'un sous-groupe propre multiplicatif divisible et sans torsion, noté $\ddot{U}$ et coloré en vert, tel que $\mathrm{RM}(K) = 2$ et $\mathrm{RM}(\ddot{U}) = 1$ (où $\mathrm{RM}(X)$ désigne le rang de Morley de X, qui dans tout groupe de rang de Morley fini est égal au rang de Lascar). On peut alors voir $\ddot{U}$ comme un

$\mathbb{Q}$-espace vectoriel qui est fortement minimal avec toute la structure induite. Nous travaillons dans un langage relationnel, à l'exception de la loi du groupe multiplicatif et, pour chaque $q \in \mathbb{Q}$, de la multiplication linéaire par q sur les éléments verts. À l'élément zéro près, nos structures sont donc des sous-groupes multiplicatifs d'un corps de caractéristique nulle dont le sous-groupe vert est divisible sans torsion. Pour deux structures A et B, on note $A * B$ la structure engendrée, qui est, modulo l'élément 0, le plus petit sous-groupe multiplicatif les contenant et clos par racines vertes.

Pour deux structures $A \subseteq B$ avec B finiment engendrée sur A, on définit une prédimension relative

$$\delta(B/A) = 2 \operatorname{degtr}(B/A) - \operatorname{dimlin}_{\mathbb{Q}}(\ddot{U}(B)/\ddot{U}(A)) \ ;$$

lorsque A est vide, on l'omet. On dit que A est *autosuffisante* dans B, noté $A \leq B$, si $\delta(B_0/A) \geq 0$ pour tout $A \subseteq B_0 \subseteq B$. Une extension autosuffisante $A \leq B$ est *minimale* s'il n'y a pas de structure intermédiaire propre autosuffisante dans B.

Le corps K est caractérisé par les conditions suivantes :
— $\delta(A) \geq 0$ pour tout $A \subset K$ finiment engendré.
— Si $A \leq K$ et $A \leq B$ est une extension minimale , alors il existe un plongement de B dans K sur A avec image autosuffisante.
— Si $A \leq K$ et $A \leq B$ avec $\delta(B/A) = 0$, alors il n'y a qu'un nombre fini de plongements de B dans K sur A.

Rappelons que δ est *sous-modulaire* : pour A et B dans K finiment engendrées,

$$\delta(A * B) + \delta(A \cap B) \leq \delta(A) + \delta(B).$$

En particulier, l'intersection de deux sous-structures autosuffisantes l'est aussi. Donc pour tout $A \subseteq K$, il existe une plus petite sous-structure autosuffisante de K contenant A, sa *clôture autosuffisante* $\langle A \rangle$, qui est algébrique sur A dans la théorie T du mauvais corps K et A-invariante en tant qu'ensemble. Si A est finiment engendré, alors $\langle A \rangle$ l'est aussi. De plus,

$$\mathrm{RM}(b/A) = \delta(\langle Ab \rangle / \langle A \rangle).$$

L'indépendance $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_C b$ au sens de T pour deux uples a et b au-dessus de $C = \langle aC \rangle \cap \langle bC \rangle$ est caractérisée par les propriétés équivalentes suivantes :

— $\delta(\langle abC \rangle / \langle bC \rangle) = \delta(\langle aC \rangle / C)$

— $\langle aC \rangle \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^0_C \langle bC \rangle$, $\langle abC \rangle = \langle aC \rangle * \langle bC \rangle$ et $\ddot{U}(\langle abC \rangle) = \ddot{U}(\langle aC \rangle) \cdot \ddot{U}(\langle bC \rangle)$,

où l'indice 0 fait référence au réduit au pur langage des anneaux, donc à la théorie T_0 des corps algébriquement clos de caractéristique 0. Notons que T_0 élimine les imaginaires, ce qui nous permet d'utiliser les résultats de la section précédente. De plus, si A et B sont autosuffisants et indépendants sur leur intersection, alors la structure engendrée $A * B$ est, modulo 0, le produit des groupes A et B. La théorie T est relativement CM-triviale au-dessus de T_0 par rapport à la clôture autosuffisante [6, Théorème 6.4].

Remarque 2.1. Soient $A \subseteq B$ autosuffisants et $C \subseteq \operatorname{acl}(A)$ autosuffisant tel que $B \cap C = A$. Alors, on a $B \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^0_A C$.

Démonstration. Par le caractère local de la déviation, on peut supposer que C est finiment engendré au-dessus de A. Comme C est T-algébrique sur A, on a $B \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}_A C$; la caractérisation de l'indépendance implique alors $B \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}^0_A C$. □

Pour deux structures $A \subseteq B$, on appelle une *base verte* de B sur A tout uple de $\ddot{U}(B)$ qui complète une base linéaire de $\ddot{U}(A)$ en une base linéaire de $\ddot{U}(B)$; notons qu'elle sera linéairement indépendante sur A car toute combinaison linéaire de points verts est verte. En particulier, une base verte de B est une base linéaire de $\ddot{U}(B)$.

Terminons par quelques remarques utiles sur le corps K :

Remarque 2.2. Supposons que la sous-structure A est autosuffisante.

(1) La sous-structure $\mathrm{acl}_0(A)$ est à nouveau autosuffisante et elle ne contient pas de nouveaux points colorés.

(2) L'élément b est algébrique sur A si et seulement s'il existe $B \supseteq Ab$ finiment engendré sur A tel que $\delta(B/A) = 0$. Si $\bar{x}$ est une base verte de B sur A alors $\mathrm{degtr}(B/A) = \mathrm{degtr}(\bar{x}/A) = |\bar{x}|/2$. En particulier, l'ensemble B est inclus dans $\mathrm{acl}_0(A, \ddot{U}(B))$; si A est vert, on a même $B \subseteq \mathrm{acl}_0(\ddot{U}(B))$.

(3) Tout point blanc est somme de deux points verts et chacun de ces couples est algébrique sur ce point blanc. Par compacité, l'ensemble de ces couples est fini. Supposons que A est engendrée par un ensemble fini Θ et considérons la sous-structure B (finiment) engendrée par une base verte de A et l'ensemble des couples verts dont la somme est un élément blanc de Θ. Alors B est autosuffisante et contenue dans $\mathrm{acl}(A)$: la sous-structure $A * B$ l'est car $\delta(A * B) = \delta(A)$. Puisque $\ddot{U}(A * B) = \ddot{U}(B)$, on en déduit l'autosuffisance de B.

3. Cherchez le tore

Dans cette partie, nous allons démontrer le théorème A énoncé dans l'introduction. Pour ce faire, nous allons décomposer le groupe en une partie 0-algébrique et une partie 0-transcendante (où l'indice 0 fait toujours référence au réduit de pur corps algébriquement clos). En utilisant cette décomposition, on construira un groupe algébrique. Finalement, on exhibera une isogénie non triviale de notre groupe vers une section du groupe algébrique construit.

Rappelons qu'un corps de rang de Morley fini élimine les imaginaires [19] et donc tout groupe interprétable est définissablement isomorphe à un groupe définissable. En particulier, le quotient $K^*/\ddot{U}$ est définissablement isomorphe à un groupe définissable. Hélas, pour deux uples réels a et b en bijection avec deux génériques indépendants de $K^*/\ddot{U}$, l'élément a_1 décrit dans le fait 1.9 est vide. Cet exemple sera notre fil conducteur pour faire une analyse plus précise des groupes définissables.

Fixons donc un groupe infini connexe G définissable dans un corps vert collapsé $(K, \ddot{U})$. Nous ajoutons aux paramètres de la théorie ceux nécessaires pour définir G ainsi que la clôture algébrique d'une suite de Morley D du générique de G. Nous supposons en particulier que G est définissable sur $\emptyset$.

Prenons a, b et c trois points génériques de G indépendants, et posons

$$a_1 = \mathrm{acl}(a) \cap \mathrm{acl}_0(\mathrm{acl}(b), \mathrm{acl}(ab)).$$

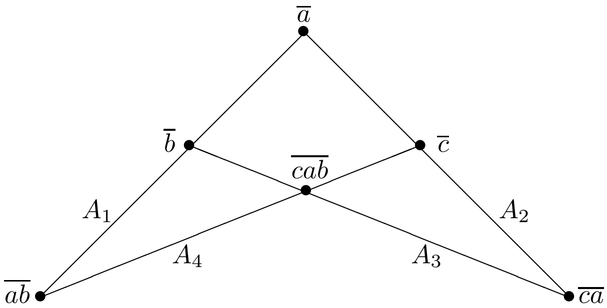
Alors a_1 est autosuffisant comme intersection de deux sous-structures autosuffisantes. Notons que $\mathrm{acl}(a)$ et a_1 peuvent avoir degré de transcendance infini. Par ailleurs, on a également $a_1 = \mathrm{acl}(a) \cap \mathrm{acl}_0(\mathrm{acl}(c), \mathrm{acl}(ca))$ par [6, Lemme 3.4].

Le fait 1.9 donne

$$\mathrm{acl}(a) \underset{a_1}{\overset{0}{\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}}} \mathrm{acl}(b), \mathrm{acl}(ab) \quad \text{ainsi que} \quad \mathrm{acl}(a) \underset{a_1}{\overset{0}{\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}}} \mathrm{acl}_0(\mathrm{acl}(c), \mathrm{acl}(ca)).$$

Lemme 3.1. *Il existe un uple autosuffisant* 0*-algébriquement clos* $\overline{a}$ *tel que :*
— $\overline{a}$ *contient* a, a^{-1} *et* a_1,
— $\overline{a}$ *est algébrique sur* a,
— $\overline{a}$ *est* 0*-algébrique sur sa base verte,*
— *le degré de transcendance* $\mathrm{degtr}(\overline{a}/a_1)$ *est fini.*

On obtient de même des uples $\overline{b}$, $\overline{ab}$, $\overline{c}$, $\overline{ca}$ *et* $\overline{cab}$, *et le diagramme suivant :*



où A_1 *est l'ensemble autosuffisant* $\mathrm{acl}_0(\langle \overline{a}, \overline{b}, \overline{ab}\rangle)$ *(et de même pour les autres droites* A_i*). De plus :*
— $\overline{a} = A_1 \cap A_2$ *et* $A_1 \underset{a}{\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}} A_2$,
— $A_1 \underset{\overline{a}}{\overset{0}{\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}}} A_2$,
— *la structure* $A_1 * A_2$ *est autosuffisante et* $\ddot{U}(A_1 * A_2) = \ddot{U}(A_1) \cdot \ddot{U}(A_2)$, *où* $\ddot{U}(A_1)$ *et* $\ddot{U}(A_2)$ *sont en somme directe au-dessus de* $\ddot{U}(\overline{a})$ *en tant que* $\mathbb{Q}$*-espaces vectoriels.*

Démonstration. Considérons un uple réel a_E représentant l'ensemble $\{a, a^{-1}\}$, où l'élément a^{-1} est l'inverse de a au sens du groupe G. Alors a, a^{-1} et a_E sont tous interalgébriques au sens de la théorie T.

La clôture autosuffisante $\langle a, a^{-1}\rangle$ est une sous-structure finiment engendrée et algébrique sur a_E. Soit Θ un ensemble fini a_E-définissable contenu dans $\langle a, a^{-1}\rangle$ et contenant a, a^{-1} ainsi qu'une base verte de $\langle a, a^{-1}\rangle$. Alors la structure engendrée par Θ est égale à $\langle a, a^{-1}\rangle$. Soit a_2' l'ensemble fini a_E-définissable constitué de $\ddot{U}(\Theta)$ ainsi que tous les couples de points verts dont la somme est un point blanc de Θ. Par la remarque 2.2(3), l'uple vert fini a_2' engendre une sous-structure verte autosuffisante incluse dans $\mathrm{acl}(a)$. De plus, les éléments a et a^{-1} sont 0-algébriques sur a_2'.

En utilisant la définissabilité de a_2' sur a_E et le fait que tous les points ont le même type, on décompose de la même façon les points b, ab, c, ca et cab.

Posons

$$A_1 = \mathrm{acl}_0(\langle a_1, a_2', b_1, b_2', ab_1, ab_2'\rangle), \qquad A_2 = \mathrm{acl}_0(\langle a_1, a_2', c_1, c_2', ca_1, ca_2'\rangle),$$
$$A_3 = \mathrm{acl}_0(\langle b_1, b_2', ca_1, ca_2', cab_1, cab_2'\rangle), \quad A_4 = \mathrm{acl}_0(\langle ab_1, ab_2', c_1, c_2', cab_1, cab_2'\rangle),$$

où la multiplication est prioritaire sur les indices : par exemple cab_1 signifie $(cab)_1$ et ab'_2 signifie $(ab)'_2$.

Par la remarque 2.2(1), les sous-structures A_1, A_2, A_3 et A_4 sont toutes autosuffisantes.

Si l'on pose

$$\overline{a} = \mathrm{acl}(a) \cap A_1, \quad \overline{b} = \mathrm{acl}(b) \cap A_1 \quad \text{et} \quad \overline{ab} = \mathrm{acl}(ab) \cap A_1,$$

qui sont autosuffisants et 0-algébriquement clos, alors $a_1, a'_2 \subseteq \overline{a} = \mathrm{acl}_0(\overline{a})$, donc $a \subseteq \overline{a} \subseteq \mathrm{acl}(a)$. Il suit que $A_1 = \mathrm{acl}_0(\langle \overline{a}, \overline{b}, \overline{ab} \rangle)$. De plus, on a $\overline{a} = \mathrm{acl}(a) \cap A_2$, car (b, ab) et $(c^{-1}, (ca)^{-1})$ ont le même type sur a_E, donc $A_1 \equiv_{a_E} A_2$. On définit $\overline{c}$, $\overline{ca}$ et $\overline{cab}$ de façon analogue.

La remarque 2.1 donne $A_1 \mathop{\smile\hskip -0.9em ^| \ }^{0}_{\overline{a}} \mathrm{acl}(a)$. Puisque $a'_2 \subseteq \overline{a} \subseteq \mathrm{acl}(a) = \mathrm{acl}(a'_2)$, on a $\delta(\overline{a}/a'_2) = 0$. Donc $\overline{a} = \mathrm{acl}_0(\ddot{U}(\overline{a}))$ d'après la remarque 2.2 (2).

Le fait 1.9 donne que $\mathrm{acl}_0(a_1, b_1, ab_1) = \mathrm{acl}_0(a_1, b_1)$, qui est autosuffisant. Comme a'_2, b'_2, ab'_2 sont finis, le dégré de transcendance $\mathrm{degtr}(A_1/a_1, b_1)$ est fini. Puisque

$$\mathrm{acl}(a) \mathop{\smile\hskip -0.9em ^| \ }^{0}_{a_1} \mathrm{acl}(b), \mathrm{acl}(ab),$$

on conclut que le degré de transcendance

$$\mathrm{degtr}(\overline{a}/a_1) = \mathrm{degtr}(\overline{a}/a_1, b_1, b'_2, ab_1, ab'_2) \leq \mathrm{degtr}(A_1/a_1, b_1),$$

est aussi fini.

Puisque b et c sont indépendants sur a, on a $A_1 \mathop{\smile\hskip -0.9em ^| \ }_a A_2$. Donc

$$\overline{a} \subseteq A_1 \cap A_2 \subseteq A_1 \cap \mathrm{acl}(a) = \overline{a}.$$

Ainsi $A_1 \cap A_2 = \overline{a}$ et

$$A_1 \mathop{\smile\hskip -0.9em ^| \ }_{\overline{a}} A_2,$$

car a et $\overline{a}$ sont interalgébriques (au sens T). Il suit de la caractérisation de l'indépendance que $A_1 * A_2$ est autosuffisante,

$$A_1 \mathop{\smile\hskip -0.9em ^| \ }^{0}_{\overline{a}} A_2 \quad \text{et} \quad \ddot{U}(A_1 * A_2) = \ddot{U}(A_1) \cdot \ddot{U}(A_2),$$

où $\ddot{U}(A_1)$ et $\ddot{U}(A_2)$ sont en somme directe au-dessus de $\ddot{U}(\overline{a})$ en tant que $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels. □

Nous venons donc de remplacer les points génériques du groupe G par des uples autosuffisants interalgébriques, qui sont 0-algébriques sur leurs bases vertes. Cela nous permettra de construire une 0-configuration de groupe à partir de points colorés. Quoique le diagramme précédent ne donne pas une 0-configuration de groupe, les droites sont indépendantes sur leurs intersections communes.

Lemme 3.2.

$$A_1 \mathop{\smile\hskip -0.9em ^| \ }^{0}_{\overline{a}, \overline{b}} A_2, A_3.$$

Démonstration. Vérifions d'abord que

$$A_1 \mathop{\smile\hskip -0.9em ^| \ }^{0}_{\overline{a} * \overline{b}} \mathrm{acl}(\overline{a}) * \mathrm{acl}(\overline{b}).$$

Comme $\overline{a}$ et $\overline{b}$ sont indépendants, les structures $\overline{a} * \overline{b}$ et $\mathrm{acl}(\overline{a}) * \mathrm{acl}(\overline{b})$ sont autosuffisantes. Puisque $\mathrm{acl}(\overline{a}) * \mathrm{acl}(\overline{b}) \subseteq \mathrm{acl}(\overline{a}, \overline{b})$, il suffit de montrer que $A_1 \cap (\mathrm{acl}(\overline{a}) *$

$\mathrm{acl}(\overline{b})) = \mathrm{acl}_0(\overline{a}, \overline{b})$, par la remarque 2.1. L'ensemble $A_1 \cap (\mathrm{acl}(\overline{a}) * \mathrm{acl}(\overline{b}))$ est 0-algébrique sur ses points verts et $\overline{a} * \overline{b}$ par la remarque 2.2(2). Or, son degré de transcendance sur $\overline{a} * \overline{b}$ est fini, donc une (toute) base verte e de cet ensemble sur $\overline{a} * \overline{b}$ est finie. Par hypothèse, elle s'écrit comme $e = e_a \cdot e_b$, avec $e_a \in \mathrm{acl}(\overline{a})$ et $e_b \in \mathrm{acl}(\overline{b})$, tous les deux verts, où le produit est pris coordonnée par coordonnée. Notons que

$$\begin{array}{lll} e \mathop{\smile\!\!\!\!\mid}^0_{\overline{a},\overline{b}} e_a & \text{car} & A_1 \mathop{\smile\!\!\!\!\mid}^0_{\overline{a}} \mathrm{acl}(\overline{a}), \\ e \mathop{\smile\!\!\!\!\mid}^0_{\overline{a},\overline{b}} e_b & \text{car} & A_1 \mathop{\smile\!\!\!\!\mid}^0_{\overline{b}} \mathrm{acl}(\overline{b}), \text{ et} \\ e_a \mathop{\smile\!\!\!\!\mid}^0_{\overline{a},\overline{b}} e_b & \text{car} & \mathrm{acl}(\overline{a}) \mathop{\smile\!\!\!\!\mid}^0 \mathrm{acl}(\overline{b}) \text{ par indépendance au sens de } T. \end{array}$$

Donc, d'après le lemme 1.2, l'élément e est 0-générique dans un translaté d'un sous-groupe algébrique connexe multiplicatif. Un tel sous-groupe de $(K^*)^n$ est un tore, défini par des relations $\mathbb{Q}$-linéaires. La dimension linéaire d'un point générique coïncide donc avec le degré de transcendance [12].

Notons que

$$\delta(e/\mathrm{acl}_0(\overline{a}, \overline{b})) = \delta(A_1 \cap (\mathrm{acl}(\overline{a}) * \mathrm{acl}(\overline{b}))/\mathrm{acl}_0(\overline{a}, \overline{b})) = 0.$$

Ainsi

$$0 = \delta(e/\mathrm{acl}_0(\overline{a}, \overline{b})) = 2\,\mathrm{degtr}(e/\overline{a}, \overline{b}) - \mathrm{dimlin}_{\mathbb{Q}}(e/\mathrm{acl}_0(\overline{a}, \overline{b})) = \mathrm{degtr}(e/\overline{a}, \overline{b}),$$

et donc $e \in \mathrm{acl}_0(\overline{a}, \overline{b})$. Alors,

$$A_1 \cap (\mathrm{acl}(\overline{a}) * \mathrm{acl}(\overline{b})) \subseteq \mathrm{acl}_0(e, \overline{a} * \overline{b}) \subseteq \mathrm{acl}_0(\overline{a}, \overline{b}).$$

Pour terminer, observons que l'on travaille depuis le début de cette partie au-dessus d'une suite de Morley D du générique de G utilisée pour le fait 1.9. Une relation 0-algébrique entre A_1 et A_2, A_3 n'utilise qu'une partie infinie propre D' de D, c'est-à-dire entre les ensembles A'_1 et A'_2, A'_3 correspondants à la même construction au-dessus de la suite de Morley D'. On peut envoyer c sur un élément de $D \setminus D'$ sur D', a, b pour obtenir une copie de $A'_2 * A'_3$ dans $\mathrm{acl}(a) * \mathrm{acl}(b)$ au-dessus de A'_1. Donc cette relation 0-algébrique se produit déjà entre A_1 et $\mathrm{acl}(a) * \mathrm{acl}(b)$ et, par transitivité, entre A_1 et $\overline{a} * \overline{b}$. □

Corollaire 3.3. *La structure $A_1 * A_2 * A_3$ est autosuffisante. On a*

$$\ddot{U}(A_1 * A_2 * A_3) = \ddot{U}(A_1) \cdot \ddot{U}(A_2) \cdot \ddot{U}(A_3).$$

En outre, ces sous-espaces sont en somme directe au-dessus de $\ddot{U}(\overline{a}) \cdot \ddot{U}(\overline{b}) \cdot \ddot{U}(\overline{ca})$.

Démonstration. Puisque

$$\overline{a} * \overline{b} \subseteq A_1 \cap (A_2 * A_3) \subseteq A_1 \subseteq \mathrm{acl}(\overline{a}, \overline{b})$$

sont tous des ensembles autosuffisants, on obtient

$$0 \leq \delta(A_1/A_1 \cap (A_2 * A_3)) \leq \delta(\mathrm{acl}(\overline{a}, \overline{b})/\overline{a} * \overline{b}) = 0.$$

On a donc égalité ; par sous-modularité et autosuffisance de $A_2 * A_3$ on obtient

$$0 \leq \delta(A_1 * A_2 * A_3/A_2 * A_3) \leq \delta(A_1/A_1 \cap (A_2 * A_3)) = 0.$$

Comme la structure $A_2 * A_3$ est autosuffisante, on en déduit que $A_1 * A_2 * A_3$ l'est également.

Puisque $\overline{a} * \overline{b}$ est autosuffisant, la remarque 2.2(1) donne $\ddot{U}(\mathrm{acl}_0(\overline{a}, \overline{b})) = \ddot{U}(\overline{a} * \overline{b})$. Enfin, comme

$$\delta(A_1 * A_2 * A_3/\overline{a} * \overline{b}) = \mathrm{RM}(G) = \delta(A_1/\overline{a} * \overline{b}) + \delta(A_2 * A_3/\overline{a} * \overline{b})$$

et

$$A_1 \mathop{\downarrow\!\!\!\!\smile}^{0}_{\overline{a},\overline{b}} A_2, A_3\,,$$

on conclut que

$$\ddot{U}(A_1 * A_2 * A_3) = \ddot{U}(A_1) \cdot \ddot{U}(A_2 * A_3),$$

et que $\ddot{U}(A_1)$ et $\ddot{U}(A_2 * A_3)$ sont en somme directe au-dessus de $\ddot{U}(\overline{a} * \overline{b}) = \ddot{U}(\overline{a}) \cdot \ddot{U}(\overline{b})$. Le fait que $\ddot{U}(A_2 * A_3)$ est la somme directe de $\ddot{U}(A_2)$ et $\ddot{U}(A_3)$ au-dessus de $\ddot{U}(\overline{ca})$ nous permet de conclure. □

Le degré de transcendance $\mathrm{degtr}(\bar{a}/a_1)$ est fini d'après le lemme 3.1. Considérons alors un uple fini a_2 de points verts de $\overline{a}$ maximal 0-transcendant sur a_1. Comme $\bar{a} = \mathrm{acl}_0(\ddot{U}(\bar{a}))$, on a $\overline{a} = \mathrm{acl}_0(a_1 a_2) = \mathrm{acl}_0(\langle a_1 a_2 \rangle)$, car $\overline{a}$ est autosuffisant. La remarque 2.2(1) donne que $\ddot{U}(\overline{a}) = \ddot{U}(\langle a_1 a_2 \rangle)$.

Nous allons maintenant compléter a_2 en une base verte de $\overline{a}$ sur a_1 de la façon la plus transcendante possible.

Lemme 3.4. *Il existe un uple vert t_a fini et 0-transcendant sur a_1 qui complète a_2 en une base verte de $\overline{a}$ sur a_1.*

Démonstration. Soit t_a complétant a_2 en une base verte de $\overline{a}$ sur a_1. Comme a_1 est autosuffisant, toute sous-structure de $\overline{a}$ engendrée sur a_1 par n éléments de a_2, t_a a degré de transcendance au moins $n/2$ sur a_1. En particulier,

$$|a_2| = \mathrm{degtr}(\overline{a}/a_1) \geq |t_a|.$$

On peut alors transformer linéairement les éléments de t_a avec les points de a_2 pour que t_a soit également 0-transcendant sur a_1. □

Remarque 3.5. Rappelons que t_a est 0-algébrique sur $a_1 a_2$. Nous obtenons des bases vertes comme ci-dessus pour chaque point du diagramme. Les indépendances

$$\mathrm{acl}(b) \mathop{\downarrow\!\!\!\!\smile}^{0} \mathrm{acl}(ab) \quad \text{et} \quad \mathrm{acl}(a) \mathop{\downarrow\!\!\!\!\smile}^{0}_{a_1} \mathrm{acl}(b), \mathrm{acl}(ab)$$

impliquent que $a_2, b_2, ab_2, t_a, t_b, t_{ab}$ est une base linéaire de $\ddot{U}(\overline{a}) \cdot \ddot{U}(\overline{b}) \cdot \ddot{U}(\overline{ab})$ au-dessus de $\ddot{U}(\mathrm{acl}_0(a_1, b_1, ab_1)) = \ddot{U}(\mathrm{acl}_0(a_1, b_1)) = \ddot{U}(a_1) \cdot \ddot{U}(b_1)$.

Lemme 3.6. *Les uples*

$$t'_a = \frac{t_c}{t_{ca}}, \quad t'_b = \frac{t_{ca}}{t_{cab}}, \quad \text{et} \quad t'_{ab} = \frac{t_c}{t_{cab}}$$

(où la division est coordonnée par coordonnée) satisfont :

(1) $t'_a \cdot t'_b = t'_{ab}$ *;*

(2) t'_a *est 0-transcendant sur* $\overline{a}, \overline{ca}$ *et de même sur* $\overline{a}, \overline{c}$*.*

Démonstration. L'égalité est évidente. Le fait 1.9 entraîne que

$$t_c \mathop{\downarrow\!\!\!\!\smile}^{0}_{c_1} \overline{a}, \overline{ca}.$$

Comme t_c est 0-transcendant sur c_1, il l'est aussi sur $\overline{a}, \overline{ca}$. Puisque $t_{ca} \in \mathrm{acl}_0(\overline{ca})$, on voit que t'_a est 0-transcendant sur $\overline{a}, \overline{ca}$. □

Soit t_1 une base linéaire de $\ddot{U}(A_1)$ sur $\ddot{U}(\overline{a}) \cdot \ddot{U}(\overline{b}) \cdot \ddot{U}(\overline{ab})$, et de même pour les autres droites. Notons que t_1 est fini car $\operatorname{degtr}(A_1/a_1, b_1)$ l'est. Alors

$$a_2, b_2, ab_2, t_a, t_b, t_{ab}, t_1$$

est une base verte de A_1 sur $\operatorname{acl}_0(a_1, b_1)$. Nous allons transformer ces bases afin qu'elles satisfassent les conditions du lemme 1.2.

Proposition 3.7. *Après une éventuelle transformation linéaire des uples t_i, on a :*

(1) $t_1 \cdot t_4 = t_2 \cdot t_3$,

(2) t_i *et* A_i *sont* 0*-algébriques sur les trois points de la droite* A_i,

(3) $|t_2| + |t_c| = |c_2|$ *et* $\mathrm{RM}(\overline{c}/c_1) = \delta(\overline{c}/c_1) = |t_2|$.

(4) t_2 *est* 0*-transcendant sur* $\overline{a}, \overline{c}, t'_a$ *et sur* $\overline{a}, \overline{ca}, t'_a$ *(et de même pour* t_3 *et* t_4 *sur les points correspondants), et* t_1 *est* 0*-transcendant sur* $\overline{a}, \overline{ab}$.

(5) t_2 *est un uple vert* T*-générique sur* $\overline{a}$.

Ainsi, les uples $\overline{a}$, $\overline{c}$, t'_a *et* t_2, *tout comme* $\overline{a}$, $\overline{ca}$, t'_a *et* t_2, *sont* 0*-indépendants.*

Démonstration. Par le corollaire 3.3, la structure $A_1 * A_2 * A_3$ est autosuffisante et t_1, t_2, t_3 est une base linéaire de $X = \ddot{U}(A_1 * A_2 * A_3)$ sur

$$Y = \ddot{U}(\overline{a}) \cdot \ddot{U}(\overline{b}) \cdot \ddot{U}(\overline{c}) \cdot \ddot{U}(\overline{ab}) \cdot \ddot{U}(\overline{ca}) \cdot \ddot{U}(\overline{cab}).$$

Comme $A_1 * A_2 * A_3$ contient $\overline{ab}$, $\overline{c}$ et $\overline{cab}$, elle contient également $\langle \overline{ab}, \overline{c}, \overline{cab} \rangle$. En particulier,

$$t_4 \in \ddot{U}(A_4) = \ddot{U}(\langle \overline{ab}, \overline{c}, \overline{cab} \rangle) \subseteq A_1 * A_2 * A_3,$$

donc ils existent $t'_i \in \ddot{U}(A_i)$ pour $1 \leq i \leq 3$, tels que $t_4 = t'_1 \cdot t'_2 \cdot t'_3$. Par symétrie, pour tout $i < j \leq 3$, l'uple t_i, t_j, t_4 est aussi une base linéaire de X sur Y. Ceci implique que $\operatorname{dimlin}(t'_i/Y) = \operatorname{dimlin}(t_i/Y)$ pour chaque $1 \leq i \leq 4$. À transformation linéaire près de t_1, t_2 et t_3, on peut donc supposer que $t_1 \cdot t_4 = t_2 \cdot t_3$, ce qui montre (1).

Par le lemme 3.2, pour tous $i, j, k \in \{1, 2, 3, 4\}$ distincts, l'uple t_i est 0-indépendant de t_j, t_k au-dessus de $\overline{a}, \overline{b}, \overline{ab}, \overline{cab}, \overline{c}, \overline{ca}$. Le lemme 1.2 appliqué à t_1, $t_2 \cdot t_3$ et t_4 donne que

$$\operatorname{tp}_0(t_1/\operatorname{acl}_0(\overline{a}, \overline{b}, \overline{ab}, \overline{cab}, \overline{c}, \overline{ca}))$$

est 0-générique dans un translaté V définissable sur $\operatorname{acl}_0(\overline{a}, \overline{b}, \overline{ab}, \overline{cab}, \overline{c}, \overline{ca})$ d'un tore de $(K^*)^{|t_1|}$. Puisque

$$t_1 \underset{\overline{a}, \overline{b}, \overline{ab}}{\overset{0}{\downarrow}} \overline{cab}, \overline{c}, \overline{ca},$$

le translaté V est définissable sur $\operatorname{acl}_0(\overline{a}, \overline{b}, \overline{ab})$. Or, pour tout translaté d'un tore, sa dimension de Zariski correspond à la dimension linéaire multiplicative du point générique. Donc

$$\operatorname{degtr}(t_1/\overline{a}, \overline{b}, \overline{ab}) = \operatorname{dimlin}_{\mathbb{Q}}(t_1/\operatorname{acl}_0(\overline{a}, \overline{b}, \overline{ab})) = \delta(t_1/\operatorname{acl}_0(\overline{a}, \overline{b}, \overline{ab})) \leq 0,$$

puisque $t_1 \in A_1 = \operatorname{acl}_0(\langle \overline{a}, \overline{b}, \overline{ab} \rangle)$. Ainsi t_1 est 0-algébrique sur $\overline{a}, \overline{b}, \overline{ab}$, et A_1 l'est aussi car

$$A_1 = \operatorname{acl}_0(\langle \overline{a}, \overline{b}\, \overline{ab} \rangle) = \operatorname{acl}_0(\overline{a}, \overline{b}, \overline{ab}, t_1) = \operatorname{acl}_0(\overline{a}, \overline{b}, \overline{ab}),$$

ce qui montre (2).

Pour (3), posons $n = \operatorname{degtr}(A_2/\overline{a}, \overline{ca})$. Du fait que $\delta(A_2/\overline{a} * \overline{ca}) = 0$ et que $\overline{a} * \overline{ca}$ est autosuffisant, la base verte c_2, t_2, t_c de A_2 sur $\overline{a} * \overline{ca}$ est de longueur $2n$. Par (2), on a

$$A_2 = \operatorname{acl}_0(\overline{c}, \overline{a}, \overline{ca}) = \operatorname{acl}_0(c_2, \overline{a}, \overline{ca}).$$

Puisque $\overline{c} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}^0_{c_1} \overline{a}, \overline{ca}$, l'uple c_2 reste 0-transcendant sur $\overline{a}, \overline{ca}$. Un calcul de prédimension donne que

$$0 = \delta(c_2, t_2, t_c/\overline{a}, \overline{ca}) = 2\,\mathrm{degtr}(c_2/\overline{a}, \overline{ca}) - |c_2| - |t_2| - |t_c|.$$

Ainsi $|t_2| + |t_c| = |c_2|$. Comme $\overline{c}$ est autosuffisant, on en déduit

$$\mathrm{RM}(\overline{c}/c_1) = \delta(\overline{c}/c_1) = 2\,\mathrm{degtr}(\overline{c}/c_1) - \mathrm{dimlin}_{\mathbb{Q}}(\overline{c}/c_1) = 2|c_2| - |c_2| - |t_c| = |t_2|.$$

Pour (4), supposons que les $j-1$ premières coordonnées $t_{2,1}, \ldots, t_{2,j-1}$ de l'uple t_2 sont 0-transcendantes sur $\overline{a}, \overline{ca}, t'_a$ et sur $\overline{a}, \overline{c}, t'_a$. Rappelons que c_2 est 0-transcendant sur $\overline{a}, \overline{ca}$ et que $|c_2| = |t_2| + |t_c| = |t_2| + |t'_a|$. L'une des coordonnées z de c_2 est donc 0-transcendante sur $\overline{a}, \overline{ca}, t'_a, t_{2,1}, \ldots, t_{2,j-1}$. Si $t_{2,j}$ est 0-algébrique sur $\overline{a}, \overline{ca}, t'_a, t_{2,1}, \ldots, t_{2,j-1}$ alors $t_{2,j}z$ est lui 0-transcendant. De plus, si $t_{2,j}$ était 0-transcendant sur $\overline{a}, \overline{c}, t'_a, t_{2,1}, \ldots, t_{2,j-1}$, l'élément $t_{2,j}z$ l'est toujours.

Afin de conserver l'égalité $t_1 \cdot t_4 = t_2 \cdot t_3$, on multiplie $t_{4,j}$ par z. Notons que si $t_{4,j}$ était 0-transcendant sur $\overline{ab}, \overline{c}, t'_{ab}, t_{4,1}, \ldots, t_{4,j-1}$, alors $t_{4,j}z$ l'est toujours. Enfin, si $t_{4,j}$ était 0-transcendant sur $\overline{ab}, \overline{cab}, t'_{ab}, t_{4,1}, \ldots, t_{4,j-1}$ mais $t_{4,j}z$ devient 0-algébrique, alors $t_{4,j}z^2$ est à nouveau 0-transcendant, ainsi que $t_{2,j}z^2$ sur les points correspondants (z^2 dénote ici le carré de z au sens du corps). Le résultat suit par récurrence et symétrie.

Pour (5), comme a et c sont indépendants, on a

$$c_2 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}_{c_1} \overline{a}.$$

Par (3), l'une des coordonnées z de c_2 est T-transcendante sur $\overline{a}, t_{2,1}, \ldots, t_{2,j-1}$ pour $j \leq |t_2|$. Si $t_{2,j}$ est algébrique sur $\overline{a}, t_{2,1}, \ldots, t_{2,j-1}$, l'élément $t_{2,j}z^n$ est T-transcendant sur $\overline{a}, t_{2,1}, \ldots, t_{2,j-1}$ pour tout $n > 0$ (où z^n dénote la puissance n-ième de z au sens du corps). Comme $t_{2,j}$ est 0-transcendant sur $\overline{a}, \overline{ca}, t'_a, (t_{2,i} : i \neq j)$, il y a au plus un n pour lequel $t_{2,j}z^n$ est 0-algébrique sur $\overline{a}, \overline{ca}, t'_a, (t_{2,i} : i \neq j)$. De même pour $t_{4,j}z^n$ au-dessus de $\overline{ab}, \overline{cab}, t'_{ab}, (t_{4,i} : i \neq j)$. Il existe donc un n commun permettant de préserver (1) et (4). On conclut par récurrence.

La dernière remarque suit du lemme 3.6 et du point (4). $\square$

Corollaire 3.8. *La droite A_2 est 0-algébrique sur $\overline{a}, \overline{c}, t'_a, t_2$. Les points $\overline{c}$ et $\overline{ca}$ sont 0-interalgébriques sur $\overline{a}, t'_a, t_2$.*

Démonstration. D'après la proposition 3.7, la droite A_2 est 0-algébrique sur $\overline{a}, \overline{c}, \overline{ca}$ et donc sur $\overline{a}, \overline{c}, ca_2$, car $\overline{ca} = \mathrm{acl}_0(ca_1, ca_2)$ et $ca_1 \in \mathrm{acl}_0(a_1, c_1)$. De plus, l'uple t'_a, t_2 est 0-transcendant sur $\overline{a}, \overline{c}$. À partir du lemme 3.6 et de la proposition 3.7, on obtient

$$\mathrm{degtr}(A_2/\overline{a}, \overline{c}) = \mathrm{degtr}(ca_2/\overline{a}, \overline{c}) = |ca_2| = |t'_a| + |t_2| = \mathrm{degtr}(t'_a, t_2/\overline{a}, \overline{c}),$$

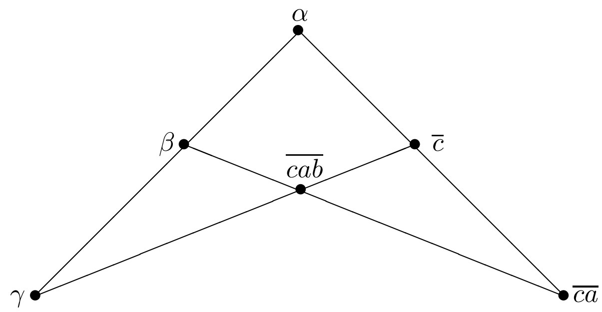
d'où $A_2 = \mathrm{acl}_0(\overline{a}, \overline{c}, t'_a, t_2)$. En particulier, on a $\overline{ca} \in \mathrm{acl}_0(\overline{a}, \overline{c}, t'_a, t_2)$ et, par symétrie, $\overline{c} \in \mathrm{acl}_0(\overline{a}, \overline{ca}, t'_a, t_2)$. $\square$

On pose

$$\begin{aligned} \alpha &= \mathrm{acl}_0(\overline{c}, \overline{ca}) \cap \mathrm{acl}_0(\overline{a}, t'_a, t_2), \\ \beta &= \mathrm{acl}_0(\overline{ca}, \overline{cab}) \cap \mathrm{acl}_0(\overline{b}, t'_b, t_3) \text{ et} \\ \gamma &= \mathrm{acl}_0(\overline{cab}, \overline{c}) \cap \mathrm{acl}_0(\overline{ab}, t'_{ab}, t_4). \end{aligned}$$

Remarquons que $a_1, t'_a \in \alpha$ et $b_1, t'_b \in \beta$, ainsi que $ab_1, t'_{ab} \in \gamma$.

Proposition 3.9. *Le diagramme*



est un quadrangle 0*-algébrique. De plus,*

$$\overline{c}, \overline{ca} \mathop{\smile\hspace{-0.9em}\mid\hspace{0.4em}}\limits^{0}_{\alpha} \overline{a}, t'_a, t_2.$$

L'élément α *et la* 0*-base canonique* $\mathrm{Cb}_0(\overline{c}, \overline{ca}/\overline{a}, t'_a, t_2)$ *sont donc* 0*-interalgébriques.*

Démonstration. Montrons d'abord que

$$(\star) \qquad A_2 \mathop{\smile\hspace{-0.9em}\mid\hspace{0.4em}}\limits^{0}_{\alpha} \overline{b}, t'_b, t_3, \overline{ab}, t'_{ab}, t_4.$$

Le lemme 3.2 donne l'indépendance $A_3, A_4 \mathop{\smile\hspace{-0.9em}\mid\hspace{0.4em}}^{0}_{\overline{c},\overline{ca}} A_2$. Celle-ci entraîne

$$\overline{b}, t'_b, t_3, \overline{ab}, t'_{ab}, t_4 \mathop{\smile\hspace{-0.9em}\mid\hspace{0.4em}}\limits^{0}_{\overline{c},\overline{ca}} A_2$$

et donc $\mathrm{Cb}_0(\overline{b}, t'_b, t_3, \overline{ab}, t'_{ab}, t_4/A_2) \in \mathrm{acl}_0(\overline{c}, \overline{ca})$.

Il reste à montrer que $\mathrm{Cb}_0(\overline{b}, t'_b, t_3, \overline{ab}, t'_{ab}, t_4/A_2) \in \mathrm{acl}_0(\overline{a}, t'_a, t_2)$, c'est-à-dire

$$\overline{b}, t'_b, t_3, \overline{ab}, t'_{ab}, t_4 \mathop{\smile\hspace{-0.9em}\mid\hspace{0.4em}}\limits^{0}_{\overline{a}, t'_a, t_2} A_2.$$

Comme $A_3 \mathop{\smile\hspace{-0.9em}\mid\hspace{0.4em}}^{0}_{\overline{b}} A_1$, on a $\overline{ca}, t'_b, t_3 \mathop{\smile\hspace{-0.9em}\mid\hspace{0.4em}}^{0}_{\overline{b}} A_1$. Puisque $\overline{b}$, $\overline{ca}$ et t'_b, t_3 sont 0-indépendants par la proposition 3.7, il suit que $\overline{ca}, t'_b, t_3 \mathop{\smile\hspace{-0.9em}\mid\hspace{0.4em}}^{0} A_1$ et

$$(\dagger) \qquad \overline{ca} \mathop{\smile\hspace{-0.9em}\mid\hspace{0.4em}}\limits^{0}_{A_1} t'_b, t_3.$$

L'indépendance $A_3 \mathop{\smile\hspace{-0.9em}\mid\hspace{0.4em}}^{0}_{\overline{b},\overline{ca}} A_1, A_2$ entraîne $t'_b, t_3 \mathop{\smile\hspace{-0.9em}\mid\hspace{0.4em}}^{0}_{A_1,\overline{ca}} \overline{c}, t'_a, t_2$; cette indépendance et (†) donnent par transitivité $t'_b, t_3 \mathop{\smile\hspace{-0.9em}\mid\hspace{0.4em}}^{0}_{A_1} \overline{c}, t'_a, t_2$ et donc

$$t'_b, t_3 \mathop{\smile\hspace{-0.9em}\mid\hspace{0.4em}}\limits^{0}_{A_1, t'_a, t_2} \overline{c}.$$

Comme $t_1 \cdot t_4 = t_2 \cdot t_3$ et $t'_a \cdot t'_b = t'_{ab}$, on a

$$(\ddagger) \qquad t'_{ab}, t_4 \mathop{\smile\hspace{-0.9em}\mid\hspace{0.4em}}\limits^{0}_{A_1, t'_a, t_2} \overline{c}.$$

Ensuite $A_2 \mathop{\smile\hspace{-0.9em}\mid\hspace{0.4em}}^{0}_{\overline{a}} A_1$ implique $\overline{c} \mathop{\smile\hspace{-0.9em}\mid\hspace{0.4em}}^{0}_{\overline{a}, t'_a, t_2} A_1$, ce qui avec (‡) entraîne

$$\overline{c} \mathop{\smile\hspace{-0.9em}\mid\hspace{0.4em}}\limits^{0}_{\overline{a}, t'_a, t_2} A_1, t'_{ab}, t_4.$$

Comme $A_2 \subseteq \mathrm{acl}_0(\overline{a}, \overline{c}, t'_a, t_2)$ d'après le corollaire 3.8,

$$A_2 \mathop{\smile\hspace{-0.9em}\mid\hspace{0.4em}}\limits^{0}_{\overline{a}, t'_a, t_2} A_1, t'_{ab}, t_4.$$

À nouveau les identités $t_1 \cdot t_4 = t_2 \cdot t_3$ et $t'_a \cdot t'_b = t'_{ab}$ donnent

$$\overline{b}, t'_b, t_3, \overline{ab}, t'_{ab}, t_4 \mathop{\downarrow\!\!\!\!\smile}^0_{\overline{a}, t'_a, t_2} A_2,$$

ce qui entraîne $(\star)$.

Nous allons maintenant vérifier que les points et les droites du diagramme satisfont les relations d'un quadrangle 0-algébrique.

L'indépendance $(\star)$ entraîne

$$\overline{c}, \overline{ca} \mathop{\downarrow\!\!\!\!\smile}^0_{\alpha} \overline{b}, t'_b, t_3, \overline{ab}, t'_{ab}, t_4,$$

ce qui implique

$$(\sharp) \qquad \overline{c}, \overline{ca} \mathop{\downarrow\!\!\!\!\smile}^0_{\alpha} \beta, \gamma.$$

Alors, les droites (α, β, γ) et $(\alpha, \overline{c}, \overline{ca})$ sont 0-indépendants sur leur intersection α. Par symétrie, chaque autre droite est 0-indépendante de (α, β, γ) sur leur intersection. La 0-indépendance de deux droites différentes de (α, β, γ) sur leur intersection découle de l'indépendance des droites A_i.

Par la proposition 3.7,

$$\overline{a}, t'_a, t_2 \mathop{\downarrow\!\!\!\!\smile}^0 \overline{c} \quad \text{et} \quad \overline{a}, t'_a, t_2 \mathop{\downarrow\!\!\!\!\smile}^0 \overline{ca}.$$

Ainsi α, $\overline{c}$ et $\overline{ca}$ sont deux à deux 0-indépendants. D'après le corollaire 3.8 appliqué aux droites A_3 et A_4, on a $\overline{ca} \in \mathrm{acl}_0(\overline{b}, \overline{cab}, t'_b, t_3)$ et $\overline{cab} \in \mathrm{acl}_0(\overline{ab}, \overline{c}, t'_{ab}, t_4)$, ce qui implique $\overline{ca} \in \mathrm{acl}_0(\overline{b}, t'_b, t_3, \overline{ab}, \overline{c}, t'_{ab}, t_4)$. Par $(\star)$, on conclut

$$\overline{ca} \in \mathrm{acl}_0(\alpha, \overline{c}).$$

On a de même $\overline{c} \in \mathrm{acl}_0(\alpha, \overline{ca})$. Donc chaque point de la droite $(\alpha, \overline{c}, \overline{ca})$ est 0-algébrique sur les deux autres.

Par symétrie, on obtient les mêmes propriétés pour les droites $(\beta, \overline{cab}, \overline{ca})$ et $(\gamma, \overline{cab}, \overline{c})$.

Pour la droite (α, β, γ), l'indépendance $A_2 \mathop{\downarrow\!\!\!\!\smile}^0_{\overline{ca}} A_3$ implique $\alpha \mathop{\downarrow\!\!\!\!\smile}^0_{\overline{ca}} \beta$. Comme $\alpha \mathop{\downarrow\!\!\!\!\smile}^0 \overline{ca}$ on a $\alpha \mathop{\downarrow\!\!\!\!\smile}^0 \beta$. Puisque $\overline{cab} \in \mathrm{acl}_0(\beta, \overline{ca})$, l'indépendance $(\sharp)$ implique

$$\gamma \mathop{\downarrow\!\!\!\!\smile}^0_{\alpha, \beta} \overline{c}, \overline{ca}, \overline{cab},$$

et donc $\gamma \in \mathrm{acl}_0(\alpha, \beta)$. Par symétrie, les points α, β et γ sont deux-à-deux 0-indépendants et chacun est 0-algébrique sur les deux autres.

Il s'agit bien d'un quadrangle 0-algébrique.

Pour la dernière affirmation, notons que l'uple α est dans $\mathrm{acl}_0(\overline{a}, t'_a, t_2)$, par définition. Or, la proposition 3.7 entraîne $\overline{c} \mathop{\downarrow\!\!\!\!\smile}^0 \overline{a}, t'_a, t_2, \alpha$, ce qui donne $\overline{c} \mathop{\downarrow\!\!\!\!\smile}^0_{\alpha} \overline{a}, t'_a, t_2$, d'où

$$\overline{c}, \overline{ca} \mathop{\downarrow\!\!\!\!\smile}^0_{\alpha} \overline{a}, t'_a, t_2\,,$$

car $\overline{ca} \in \mathrm{acl}_0(\overline{c}, \alpha)$. □

Le théorème de la configuration de groupe donne, sur des paramètres $B = \mathrm{acl}(B)$ indépendants de a, b, c, un groupe T_0-$*$-définissable 0-connexe H, et des éléments 0-génériques 0-indépendants h et h' dans H sur B, tels que α est 0-interalgébrique avec h sur B, ainsi que β avec h' et γ avec hh'. Notons que les éléments h et h'

ne sont pas forcément indépendants et que leur T-type n'est pas générique dans H sur B.

Comme B est indépendant de $\mathrm{acl}(a, b, c)$, toutes les indépendances et 0-indépendances obtenues à ce point sont préservées par l'adjonction de B à la base.

Corollaire 3.10. *Les uples h et (t'_a, t_2) sont 0-interalgébriques sur $\overline{a}, B$.*

Démonstration. Par l'interalgébricité de α et h sur B, il suffit de le démontrer pour α à la place de h. Notons d'abord que l'uple α est dans $\mathrm{acl}_0(\overline{a}, t'_a, t_2)$ par définition. Réciproquement, la proposition précédente donne

$$\overline{c}, \overline{ca} \mathop{\downfree}^0_{\alpha} \overline{a}, t'_a, t_2,$$

d'où $\overline{c}, \overline{ca} \downfree^0_{\overline{a},\alpha} t'_a, t_2$. Comme $t'_a, t_2 \in \mathrm{acl}_0(\overline{a}, \overline{c}, \overline{ca})$, on conclut que

$$t'_a, t_2 \in \mathrm{acl}_0(\overline{a}, \alpha). \quad \square$$

Pour la suite, on pose $r = |t'_a|$ et $s = |t_2|$.

Proposition 3.11. *Soit $S = \mathrm{Stab}_0(h, t'_a, t_2/\overline{a}, B)$ le 0-stabilisateur de (h, t'_a, t_2) dans $H \times (K^*)^{r+s}$ et N sa projection sur H. Alors S et N sont 0-connexes et T_0-définissables sur B, et (h, t'_a, t_2) est 0-générique sur $\overline{a}, B$ dans le translaté $S \cdot (h, t'_a, t_2)$, qui est aussi T_0-définissable sur $\mathrm{acl}_0(\overline{a}, B)$. Le sous-groupe N est central dans H, et S induit une isogénie entre N et $(K^*)^{r+s}$.*

De plus, l'uple a_1 est 0-algébrique sur B et le paramètre canonique $\ulcorner Nh \urcorner$ du translaté Nh.

Démonstration. Puisque $h \in \mathrm{acl}_0(A_2, B)$, l'indépendance $A_2 \downfree^0_{\overline{a},B} A_1$ implique

$$(\dagger) \qquad h, t'_a, t_2 \mathop{\downfree}^0_{\overline{a},B} \overline{b}, \overline{ab},$$

et $S = \mathrm{Stab}_0(h, t'_a, t_2/\overline{a}, \overline{b}, \overline{ab}, B)$.

Vérifions d'abord que

$$(h, t'_a, t_2), \quad (h', t'_b, t_3) \quad \text{et} \quad (hh', t'_{ab}, t_1 \cdot t_4) = (h, t'_a, t_2) \cdot (h', t'_b, t_3)$$

sont deux-à-deux 0-indépendants au-dessus de $\overline{a}, \overline{b}, \overline{ab}, B$.

L'indépendance $A_2 \downfree^0_{\overline{a},B} A_1$ donne $t'_a, t_2 \downfree^0_{\overline{a},\overline{ca},B} \overline{b}, \overline{ab}$. Comme $t'_a, t_2 \downfree^0_{\overline{a},B} \overline{ca}$ par la proposition 3.7, on a que $t'_a, t_2 \downfree^0_{\overline{a},B} \overline{b}, \overline{ab}, \overline{ca}$. Puisque h est 0-algébrique sur $\overline{a}, t'_a, t_2, B$, on obtient

$$h, t'_a, t_2 \mathop{\downfree}^0_{\overline{a},\overline{b},\overline{ab},B} \overline{ca}.$$

Enfin, l'indépendance $A_1 A_2 \downfree^0_{\overline{b},\overline{ca},B} A_3$ implique

$$h, t'_a, t_2 \mathop{\downfree}^0_{\overline{a},\overline{b},\overline{ab},\overline{ca},B} h', t'_b, t_3\,,$$

et donc par transitivité

$$h, t'_a, t_2 \mathop{\downfree}^0_{\overline{a},\overline{b},\overline{ab},B} h', t'_b, t_3.$$

Par symétrie, puisque $t_1 \in \mathrm{acl}_0(\overline{a}, \overline{b}, \overline{ab})$, on obtient également

$$hh', t'_{ab}, t_1 \cdot t_4 \mathop{\downfree}^0_{\overline{a},\overline{b},\overline{ab},B} h', t'_b, t_3 \quad \text{et} \quad hh', t'_{ab}, t_1 \cdot t_4 \mathop{\downfree}^0_{\overline{a},\overline{b},\overline{ab},B} h, t'_a, t_2.$$

D'après le lemme 1.2, le groupe S est 0-connexe, et le point (h, t'_a, t_2) est 0-générique sur $\operatorname{acl}_0(\overline{a}, \overline{b}, \overline{ab}, B)$ dans le translaté $S \cdot (h, t'_a, t_2)$, qui est T_0-définissable sur $\operatorname{acl}_0(\overline{a}, \overline{b}, \overline{ab}, B)$. Notons que N doit être aussi 0-connexe.

Puisque $S = \operatorname{Stab}_0(h, t'_a, t_2/\overline{a}, B)$, il est T_0-définissable sur $\operatorname{acl}_0(\overline{a}, B)$. Le translaté $S \cdot (h, t'_a, t_2)$ est T_0-définissable sur

$$\operatorname{acl}_0(h, t'_a, t_2, \overline{a}, B) \cap \operatorname{acl}_0(\overline{a}, \overline{b}, \overline{ab}, B) = \operatorname{acl}_0(\overline{a}, B),$$

par l'indépendance (†). En particulier, sa projection Nh est également T_0-définissable sur $\operatorname{acl}_0(\overline{a}, B)$, et $\ulcorner Nh \urcorner \in \operatorname{acl}_0(\overline{a}, B)$.

D'après le lemme 1.2, on a aussi

$$S = \operatorname{Stab}_0(hh', t'_{ab}, t_1 \cdot t_4/\overline{a}, \overline{b}, \overline{ab}, B).$$

Or, l'indépendance $A_4 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_{\overline{ab}, B} A_1$ et $hh' \in \operatorname{acl}_0(A_4, B)$ impliquent

$$hh', t'_{ab}, t_4 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}^{0}_{\overline{ab}, t_1, B} \overline{a}, \overline{b}\,;$$

donc S est T_0-définissable sur $\operatorname{acl}_0(\overline{ab}, t_1, B)$. Comme $\overline{a}$, $\overline{ab}$ et t_1 sont 0-indépendants sur B d'après la proposition 3.7, on a $\operatorname{acl}_0(\overline{a}, B) \cap \operatorname{acl}_0(\overline{ab}, t_1, B) = B$. On conclut que S, ainsi que N, sont T_0-définissables sur B.

Puisque h est 0-générique dans H sur B, il est 0-générique dans le translaté Nh sur $\operatorname{acl}_0(\ulcorner Nh \urcorner, B)$. Notons que

$$a_1 \in \overline{a} \cap \alpha \subseteq \overline{a} \cap \operatorname{acl}_0(h, B).$$

Soit (n, t', t) un 0-générique de S sur $B, \overline{a}, h$. Alors $n \in \operatorname{Stab}_0(h/\overline{a}, B)$, d'où

$$nh \equiv^0_{\operatorname{acl}_0(\overline{a}, B)} h$$

et $a_1 \in \operatorname{acl}_0(nh, B)$. Comme n est 0-générique dans N sur $B, \overline{a}, h$, on a $nh \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}^0_{\ulcorner Nh \urcorner, B} h$. Alors

$$a_1 \in \operatorname{acl}_0(nh, B) \cap \operatorname{acl}_0(h, B) = \operatorname{acl}_0(\ulcorner Nh \urcorner, B).$$

De plus, l'élément h est 0-générique dans Nh sur $\overline{a}, B$.

D'après la proposition 3.7, la paire (t'_a, t_2) est 0-générique sur $\overline{a}, B$. La 0-interalgébricité entre h et (t'_a, t_2) sur $\overline{a}, B$ entraîne, par le lemme 1.5, que le stabilisateur S est une isogénie T_0-définissable sur B entre N et $(K^*)^{r+s}$. En particulier, le sous-groupe N est l'enveloppe T_0-définissable de sa torsion, et sa n-torsion est finie pour chaque n, car c'est le cas de $(K^*)^{r+s}$ et N est 0-connexe. Pour montrer que N est central dans H, il suffit donc de vérifier que N est normal dans H : ainsi sa n-torsion est H-invariante pour tout n ; comme elle est finie et H est connexe, elle est centrale.

On considère le 0-stabilisateur $S_1 = \operatorname{Stab}_0(h', t'_b, t_3/\overline{a}, \overline{b}, \overline{ab}, B)$ et sa projection N_1 sur H. Par symétrie, les groupes S_1 et N_1 sont T_0-définissables sur $\operatorname{acl}_0(\overline{b}, B)$. D'après le lemme 1.2 on a $N_1 = h^{-1}Nh$, donc N_1 est également T_0-définissable sur $\operatorname{acl}_0(h, B)$. Comme $h \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}^0_B \overline{b}$, le groupe N_1 est T_0-définissable sur B, et $h^{-1}Nh$ ne dépend pas du 0-générique h de H sur B. Si h_1 est un deuxième 0-générique de H sur B indépendant de h, on a $h_1^{-1}Nh_1 = h^{-1}Nh$. Ainsi hh_1^{-1} est un 0-générique de H sur B qui normalise N ; par connexité tout H normalise N. $\square$

Le lemme 1.2 appliqué aux uples (h, t'_a, t_2), $(h', t'_b, t_3 t_1^{-1})$ et (hh', t'_{ab}, t_4) sur $\operatorname{acl}_0(\overline{a}, \overline{b}, \overline{ab}, B)$, qui contient t_1, entraîne également le résultat suivant :

Remarque 3.12. On a

$$S = \mathrm{Stab}_0(h, t'_a, t_2/\overline{a}, B) = \mathrm{Stab}_0(hh', t'_{ab}, t_4/\overline{ab}, B)$$

et le translaté $S \cdot (hh', t'_{ab}, t_4)$ est T_0-définissable sur $\mathrm{acl}_0(\overline{ab}, B)$.

Avec les notations précédentes, l'uple t_2 est un uple vert générique de $(K^*)^s$ sur $\overline{a}$, par la proposition 3.7. Or, quoique l'uple (t_2, t'_a) est 0-générique dans $(K^*)^{r+s}$ sur $\overline{a}, B$, il ne l'est pas forcement au sens de T. Cependant, nous allons modifier h pour supprimer t'_a.

Par connexité de K^*, l'isogénie S est surjective. Il y a donc h_0 et h'_0 dans N avec $(h_0, t'_a, \bar{1})$ et $(h'_0, t'_b, \bar{1})$ dans S, et leur produit $(h_0h'_0, t'_{ab}, \bar{1})$ est également dans S. Posons $k = h_0^{-1}h$ et $k' = h_0'^{-1}h'$.

Lemme 3.13. *On a*

$$\mathrm{acl}_0(\overline{c}, \overline{ca}, B) \cap \mathrm{acl}_0(\overline{a}, t_2, B) = \mathrm{acl}_0(k, B) \quad \textit{et} \quad \overline{c}, \overline{ca} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{0}_{k,B} \overline{a}, t_2\,.$$

Les uples k et t_2 sont 0-interalgébriques sur $\overline{a}, B$, et a est algébrique sur k, B.

Démonstration. Le translaté $S \cdot (h, t'_a, t_2) = S \cdot (k, \bar{1}, t_2)$ est T_0-définissable sur $\mathrm{acl}_0(\overline{a}, B)$. Comme S est une isogénie, il suit que k et t_2 sont 0-interalgébriques sur $\overline{a}, B$. Puisque $h_0 \in \mathrm{acl}_0(t'_a, B)$ et $t'_a, h \in \mathrm{acl}_0(\overline{c}, \overline{ca}, B)$, on a

$$k \in \mathrm{acl}_0(\overline{c}, \overline{ca}, B) \cap \mathrm{acl}_0(\overline{a}, t_2, B).$$

Puisque $Nh = Nk$, la proposition 3.11 entraîne que

$$a_1 \in \mathrm{acl}_0(\ulcorner Nh \urcorner, B) = \mathrm{acl}_0(\ulcorner Nk \urcorner, B) \subseteq \mathrm{acl}_0(k, B).$$

Le fait 1.9 donne $\overline{c}, \overline{ca} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{0}_{a_1,B} \overline{a}$, donc

$$\overline{c}, \overline{ca} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{0}_{k,B} \overline{a}, t_2,$$

ce qui entraîne en particulier

$$\mathrm{acl}_0(\overline{c}, \overline{ca}, B) \cap \mathrm{acl}_0(\overline{a}, t_2, B) = \mathrm{acl}_0(k, B).$$

Enfin, puisque $\overline{c} * \overline{ca} * B$ est autosuffisant, la clôture autosuffisante $\langle k, B\rangle$ est dans $\mathrm{acl}_0(\overline{c}, \overline{ca}, B)$. Ainsi,

$$\overline{c}, \overline{ca} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{0}_{\langle k,B\rangle} a_2, t_a, t_2.$$

Comme a_2, t_a, t_2 est linéairement indépendant sur $\ddot{U}(\overline{c} * \overline{ca} * B)$, on obtient

$$\delta(a_2, t_a, t_2/\langle k, B\rangle) = \delta(a_2, t_a, t_2/\overline{c} * \overline{ca} * B) = \delta(A_2/\overline{c} * \overline{ca} * B) = 0,$$

ce qui permet de conclure que a_2 est algébrique sur $\langle k, B\rangle$ et donc sur k, B. Comme $a \in \mathrm{acl}(a_1, a_2)$, on conclut que a est aussi algébrique sur k, B. □

On obtient ainsi le théorème A de l'introduction.

Théorème 3.14. *Un groupe interprétable dans un corps vert collapsé est isogène à un quotient d'un sous-groupe définissable d'un groupe algébrique par un sous-groupe central, qui est lui isogène à une puissance du sous-groupe coloré $\ddot{U}$.*

Démonstration. Avec les définitions et notations précédentes, on considère le groupe

$$\Gamma = \{n \in H : \exists\, t \in \ddot{U}^s \ (n, \bar{1}, t) \in S\}.$$

Notons que $\Gamma \leq N$ est également central dans H, et $\mathrm{RM}(\Gamma) = \mathrm{RM}(\ddot{U}^s) = s$ comme S est une isogénie.

Puisque S induit une isogénie entre N et $(K^*)^{r+s}$, l'intersection $S \cap (H \times \{\bar{1}\} \times \ddot{U}^s)$ induit une isogénie entre Γ et $\ddot{U}^s$. Comme t_2 est vert, la projection sur la première coordonnée de

$$S \cdot (k, \bar{1}, t_2) \cap (H \times \{\bar{1}\} \times \ddot{U}^s)$$

est $\Gamma k = k\Gamma$. Puisque $S \cdot (k, \bar{1}, t_2) = S \cdot (h, t'_a, t_2)$ est définissable sur $\mathrm{acl}(a, B)$, la projection $k\Gamma$ l'est aussi ; comme t_2 est un uple vert générique sur a, B, on a $\mathrm{RM}(k/a, B) = \mathrm{RM}(t_2/a, B) = s$ et k est générique dans $k\Gamma$. De même, le translaté $k'\Gamma$ est définissable sur $\mathrm{acl}(b, B)$, et $kk'\Gamma$ est définissable sur $\mathrm{acl}(ab, B)$, par la remarque 3.12.

Les uples $(a, k\Gamma)$, $(b, k'\Gamma)$ et $(ab, kk'\Gamma) = (a, k\Gamma) \cdot (b, k'\Gamma)$ sont deux à deux indépendants sur B. Par le lemme 1.2, le point $(a, k\Gamma)$ est générique dans un translaté, définissable sur B, de son stabilisateur

$$\mathrm{Stab}(a, k\Gamma/B),$$

dans $G \times (H/\Gamma)$.

Le lemme 1.5 et la remarque 1.6 donnent une endogénie de G dans H/Γ, car a est générique dans G sur B.

Pour vérifier que le noyau de cette endogénie est fini, il suffit de montrer que a et $k\Gamma$ sont interalgébriques sur B, c'est-à-dire $\mathrm{RM}(a/B) \leq \mathrm{RM}(k\Gamma/B)$. D'après le lemme 3.13, on obtient

$$\mathrm{RM}(k/B) = \mathrm{RM}(k/a, B) + \mathrm{RM}(a/B) = \mathrm{RM}(t_2/a, B) + \mathrm{RM}(a/B) = s + \mathrm{RM}(a/B).$$

Comme k est générique dans $k\Gamma$, on a par ailleurs

$$\mathrm{RM}(k\Gamma/B) \geq \mathrm{RM}(k/B) - \mathrm{RM}(k/k\Gamma, B) = \mathrm{RM}(k/B) - s.$$

Ainsi $\mathrm{RM}(k\Gamma/B) \geq \mathrm{RM}(a/B)$, comme souhaité.

Par stabilité, le groupe H est une limite projective $\varprojlim \pi_i(H)$, où chaque $\pi_i(H)$ est un groupe T_0-définissable et donc algébrique. Par compacité il existe i_0 tel que $\ddot{U}^s$ est isogène à $\pi_{i_0}(\Gamma)$, donc G est isogène à son image dans $\pi_{i_0}(H)/\pi_{i_0}(\Gamma)$.

□

4. Sous-groupes colorés

Rappelons que tout groupe simple définissable dans un corps coloré se plonge dans un groupe algébrique d'après [6, Corollaire 5.10]. Ceci et le théorème A nous amènent à étudier les sous-groupes définissables d'un groupe algébrique.

Comme dans les parties 2 et 3, on notera T la théorie d'un corps coloré K et l'indice 0 fera référence au réduit du pur corps algébriquement clos. Ainsi un groupe T_0-définissable est un groupe algébrique.

Nous commençons par une conséquence de la proposition 1.8, dans le cadre des corps colorés.

Remarque 4.1. À l'intérieur d'un groupe algébrique, on considère un translaté C d'un sous-groupe connexe définissable S, le tout défini sur un ensemble algébriquement clos A. Si le générique b de C vérifie $\ddot{U}(\langle Ab \rangle) = \ddot{U}(A)$, alors S est un sous-groupe algébrique.

Démonstration. Dans tout amalgame de Hrushovski, un type sur un ensemble algébriquement clos est stationnaire, puisque sa seule extension non-déviante correspond à l'amalgame libre. Donc $p = \mathrm{tp}(b/A)$ est stationnaire. Par la proposition 1.8, il suffit de montrer que p est l'unique complétion de rang maximal du 0-type $p_0 = \mathrm{tp}_0(b/A)$.

Notons que $\langle Ab \rangle$ coïncide avec la 0-sous-structure B engendré par A et b, puisqu'il n'y a pas de points colorés en dehors de A.

Si $x \models p_0$, la 0-sous-structure X engendrée par A et x est T_0-isomorphe à B. Si $X = \langle X \rangle$ et $\ddot{U}(X) = \ddot{U}(A)$, alors $x \models p$, car le diagramme d'une sous-structure autosuffisante détermine son type. Sinon, on a $\ddot{U}(X) \supsetneq \ddot{U}(A)$ ou $X \subsetneq \langle X \rangle$. Dans ces deux cas,

$$\delta(\langle X \rangle / A) \leq \delta(X/A) \leq \delta(B/A) = \delta(\langle Ab \rangle / A),$$

avec au moins une inégalité stricte, ce qui implique $\mathrm{RM}(x/A) < \mathrm{RM}(b/A)$. □

Théorème 4.2. *Dans un corps vert, tout sous-groupe définissable connexe G d'un groupe algébrique a un sous groupe normal algébrique N, tel que le quotient G/N est définissablement isomorphe à une puissance cartésienne du sous-groupe multiplicatif vert.*

Démonstration. Dans un corps vert, considérons un sous-groupe connexe définissable G d'un groupe algébrique. On suppose que G est définissable sur $\emptyset$.

Soient a et b deux génériques indépendants de G et notons $c = ab$ leur produit. Alors $\langle a \rangle$ et $\langle b \rangle$ sont en amalgame libre, et la structure $\langle a \rangle * \langle b \rangle$ est autosuffisante. L'élément c est 0-algébrique sur cette structure, car la loi de groupe est T_0-définissable. Ainsi

$$\langle c \rangle \subseteq \mathrm{acl}_0(\langle a \rangle * \langle b \rangle),$$

par la remarque 2.2(1), qui est également valable dans le cas non-collapsé.

En particulier, la base verte t de $\langle c \rangle$ est une combinaison linéaire des bases vertes r et s de $\langle a \rangle$ et $\langle b \rangle$, respectivement. Par le même argument qu'au début de la preuve de la proposition 3.7, on peut supposer que $t = r \cdot s$. Comme r, s et t sont deux à deux indépendants, ils sont également 0-indépendants [6, Lemme 2.1]. Par le lemme 1.2, l'uple r est 0-générique dans un translaté T_0-définissable sur $\emptyset$ de son 0-stabilisateur dans $(K^*)^{|r|}$, qui de plus est 0-connexe. Or, les seuls sous-groupes algébriques 0-connexes de $(K^*)^{|r|}$ sont des tores, dont la dimension de Zariski correspond à la dimension linéaire du point générique. On conclut que r est un uple 0-transcendant. Comme la structure engendrée par r est autosuffisante dans $\langle a \rangle$ et donc autosuffisante, l'uple vert r est générique dans $\ddot{U}^{|r|}$.

Puisque (a, r), (b, s) et (c, t) sont deux à deux indépendants et que r est algébrique sur a, les lemmes 1.2, 1.5 et la remarque 1.6 entraînent que le stabilisateur $\mathrm{Stab}(a, r)$ induit une endogénie définissable ϕ de G sur $(\ddot{U}^*)^{|r|}$. Le conoyau de cette endogénie est trivial, car $\ddot{U}$ n'a pas de torsion et donc pas de sous-groupes finis non-triviaux.

Pour montrer que le noyau $\ker(\phi)$ est un groupe algébrique, il suffit de le faire pour sa composante connexe N, car nous sommes à l'intérieur d'un groupe algébrique. Le paramètre canonique de $\ker(\phi)a$ est interdéfinissable avec $\phi(a) = r$, et donc le paramètre canonique de Na est algébrique sur r. Si n est générique dans N sur a, alors il l'est aussi sur r, donc na est un générique de Na sur $\mathrm{acl}(r)$. La remarque 4.1 permet de conclure si l'on vérifie que

$$\ddot{U}(\langle na, \mathrm{acl}(r) \rangle) = \ddot{U}(\mathrm{acl}(r)).$$

Puisque $(n, \bar{1}) \in \mathrm{Stab}(a, r)$, les points a et na ont même type sur $\mathrm{acl}(r)$, ce qui donne l'égalité $\ddot{U}(\langle na, \mathrm{acl}(r)\rangle) = \ddot{U}(\langle a, \mathrm{acl}(r)\rangle)$.

Posons $C = \mathrm{acl}(r) \cap \langle a\rangle$. Alors a et $\mathrm{acl}(r)$ sont trivialement indépendants au-dessus de C, car $r \in C$. La caractérisation de l'indépendance nous donne que $\langle a, \mathrm{acl}(r)\rangle$ est l'amalgame libre de $\langle a\rangle$ et $\mathrm{acl}(r)$ au-dessus de C. De plus, puisque $\ddot{U}(\langle a\rangle) = \langle r\rangle$ est le sous-groupe engendré par r, on obtient

$$\ddot{U}(\langle a, \mathrm{acl}(r)\rangle) = \ddot{U}(\mathrm{acl}(r)). \quad \square$$

Dans le cas des corps rouges, les sous-groupes algébriques de $(K^+)^{|r|}$ sont donnés par des systèmes de p-polynômes, dont la dimension de Zariski ne correspond pas forcement à la dimension linéaire sur le corps premier. De plus, il y a des sous-groupes rouges finis. Néanmoins, la preuve précédente s'adapte, nous permettant d'obtenir le résultat suivant :

Théorème 4.3. *Dans un corps rouge, tout sous-groupe définissable connexe G d'un groupe algébrique a un sous groupe normal algébrique N tel que le quotient G/N est définissablement isogène au groupe des points rouges d'un sous-groupe algébrique de $(K^+)^n$.*

Corollaire 4.4. *Tout groupe simple définissable dans un corps coloré est définissablement isomorphe à un groupe algébrique. En particulier, aucun mauvais groupe n'est définissable dans un corps coloré.*

Démonstration. On peut supposer que le groupe simple G est infini. D'après [6, Théorème 6.4 et Corollaire 5.10], le groupe G est définissablement isomorphe à un groupe linéaire. Dans le cas noir, il est algébrique [15, Proposition 2.4 et conclusion p.1354]. Dans les cas rouge et vert, d'après les théorèmes 4.2 et 4.3, il existe un sous-groupe algébrique normal N de G, tel que le quotient est isogène à un groupe abélien. Par simplicité, le groupe $G = N$ est algébrique. $\square$

5. La fusion au dessus de l'égalité

Une théorie ω-stable a la propriété de la multiplicité définissable (DMP) si, pour toute formule $\varphi(x, y)$, tout ordinal α et entier $n < \omega$, l'ensemble des paramètres a tels que $\varphi(x, a)$ a rang de Morley α et multiplicité n est définissable.

Dans cette partie, nous décrirons complètement les groupes définissables dans une fusion T (libre ou collapsée) de deux théories fortement minimales T_1 et T_2 avec la DMP, à langages disjoints [10, 5]. Comme dans les parties précédentes, les notions modèle-théoriques seront prises au sens de T ; l'indice i, pour $i = 1, 2$, fera référence à la théorie T_i.

Rappelons que la fusion T est obtenue en utilisant la prédimension

$$\delta(X) = \dim_1(X) + \dim_2(X) - |X|,$$

où $\dim_1$ et $\dim_2$ sont les rangs de Morley respectifs de T_1 et T_2. Comme dans la partie 2, cette prédimension induit un opérateur, la clôture autosuffisante $\langle . \rangle$, ainsi qu'une dimension, notée dim : la prédimension de la clôture autosuffisante. Alors $\bar{a} \in \mathrm{acl}(B)$ implique $\dim(\bar{a}/B) = 0$; la réciproque est vraie dans le cas collapsé. En particulier, deux uples interalgébriques ont même dimension.

Pour deux uples $\bar{a}$, $\bar{b}$ et un ensemble C tel que $\langle aC\rangle \cap \langle bC\rangle = C$, l'indépendance est caractérisée de la manière suivante :

$$\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_{C} \bar{b} \quad \text{si et seulement si} \quad \begin{cases} \langle \bar{a}, C\rangle \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{i}_{C} \langle \bar{b}, C\rangle \text{ pour } i = 1,\ 2\,, \text{ et} \\ \langle \bar{a}, \bar{b}, C\rangle = \langle \bar{a}, C\rangle \cup \langle \bar{b}, C\rangle. \end{cases}$$

Après adjonction de constantes au langage, on peut supposer que chaque théorie fortement minimale T_i a élimination faible des imaginaires. Nous pouvons ainsi parler de la dimension d'uples d'imaginaires des théories T_1 et T_2.

Étant données deux sortes imaginaires S_1 de T_1 et S_2 de T_2, on entend par un ensemble interprétable dans $S_1 \times S_2$ la projection d'un ensemble définissable réel. Nous commençons par étudier les sous-groupes interprétables dans un produit de groupes T_i-interprétables. La démonstration du lemme suivant s'inspire de la preuve de la platitude dans l'amalgame *ab initio* [11].

Lemme 5.1. *Soient H_i des groupes T_i-interprétables pour $i = 1, 2$. Tout sous-groupe interprétable connexe K de $H_1 \times H_2$ est de la forme $K_1 \times K_2$, où $K_i \leq H_i$ est T_i-interprétable. Un générique $g = (g^1, g^2)$ de K consiste en un couple indépendant de génériques de chaque K_i. De plus, au-dessus de la clôture algébrique des paramètres nécessaires, on a $\dim(g^i) = \dim_i(g^i)$ et $\dim(K) = \dim_1(K_1) + \dim_2(K_2)$.*

Démonstration. On peut supposer que le langage est relationnel et que les groupes H_1, H_2 et K sont interprétables sur $\emptyset$. Nous allons vérifier d'abord que g^1 et g^2 sont T-indépendants pour un générique $g = (g^1, g^2)$ de K. Par élimination faible des imaginaires, fixons un uple réel fini $a = (a^1, a^2)$ tel que a^i est i-algébrique sur l'imaginaire g^i, qui est lui T_i-définissable sur a^i. Posons $X = \langle a\rangle \cap \operatorname{acl}(\emptyset)$, qui est autosuffisant comme intersection de deux ensembles autosuffisants.

Comme $X \subset \operatorname{acl}(\emptyset)$, il suffit de montrer que $a^1 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_X a^2$, ce qui par la caractérisation précédente équivaut à montrer que les clôtures $\langle X, a^1\rangle$ et $\langle X, a^2\rangle$ sont i-indépendants pour chaque $i = 1, 2$ et que $\langle X, a\rangle$ est la réunion de ces deux clôtures.

Considérons une suite de Morley $(g_i)_{i<\omega}$ du type $\operatorname{tp}(g)$. Pour $i \neq j$, l'élément $g_i {g_j}^{-1}$ est aussi générique avec même type que g sur $\operatorname{acl}(\emptyset)$, par connexité de K. On choisit alors $b_{i,j} = (b^1_{i,j}, b^2_{i,j})$ tel que $(g_i g_j^{-1}, b_{i,j})$ a même type que (g, a) sur $\operatorname{acl}(\emptyset)$. Comme $g_i g_j^{-1}$ et $g_k g_l^{-1}$ sont indépendants pour $(i, j) \neq (k, l)$, on a

$$\langle b_{i,j}\rangle \cap \langle b_{k,l}\rangle = \langle b_{i,j}\rangle \cap \operatorname{acl}(\emptyset) = \langle a\rangle \cap \operatorname{acl}(\emptyset) = X.$$

Fixons $n > 0$. Puisque $b^1_{i,j} \in \operatorname{acl}_1(b^1_{0,i}, b^1_{0,j})$ pour $i, j > 0$, on obtient

$$\dim_1((b^1_{i,j})_{i<j<n}/X) \leq \dim_1((b^1_{0,k})_{k<n}/X) \leq n \dim_1(a^1/X).$$

Si

$$Y = \bigcup_{i<j<n} \langle b_{i,j}\rangle,$$

alors

$$\begin{aligned} \dim_1(Y/X) &= \dim_1((b^1_{i,j})_{i<j<n}/X) + \dim_1(Y/X, (b^1_{i,j})_{i<j<n}) \\ &\leq n \dim_1(a^1/X) + \sum_{i<j<n} \dim_1(\langle b_{i,j}\rangle/X, b^1_{i,j}) \\ &\leq n \dim_1(a^1/X) + \binom{n}{2} \dim_1(\langle a\rangle/X, a^1). \end{aligned}$$

De même,

$$\dim_2(Y/X) \leq n \dim_2(a^2/X) + \binom{n}{2} \dim_2(\langle a\rangle/X, a^2).$$

Puisque Y est la réunion d'ensembles deux à deux disjoints au-dessus de X, qui est autosuffisant, on obtient :

$$\begin{aligned} 0 \leq\ \delta(Y/X) &= \dim_1(Y/X) + \dim_2(Y/X) - |Y \setminus X| \\ &\leq n\,\big(\dim_1(a^1/X) + \dim_2(a^2/X)\big) \\ &\quad + \binom{n}{2}\big(\dim_1(\langle a\rangle/X, a^1) + \dim_2(\langle a\rangle/X, a^2) - |\langle a\rangle \setminus X|\big). \end{aligned}$$

En faisant tendre n vers l'infini, on obtient

$$(\star) \qquad \begin{aligned} 0 &\leq \dim_1(\langle a\rangle/X, a^1) + \dim_2(\langle a\rangle/X, a^2) - |\langle a\rangle \setminus X| \\ &= \delta(\langle a\rangle/X, a) + \dim_1(a/X, a^1) + \dim_2(a/X, a^2) - |a \setminus X|. \end{aligned}$$

Notons que

$$\dim_1(a/X, a^1) \leq |a^2 \setminus (X \cup a^1)|,$$

avec égalité si et seulement si $a^2 \setminus (X \cup a^1)$ est un uple de points 1-indépendants sur X, a^1. De même pour $\dim_2(a/X, a^2)$. Comme

$$|a \setminus X| = |a^1 \setminus (X \cup a^2)| + |a^2 \setminus (X \cup a^1)| + |(a^1 \cap a^2) \setminus X|,$$

on en déduit que

$$\dim_1(a/X, a^1) + \dim_2(a/X, a^2) - |a \setminus X| \leq -|(a^1 \cap a^2) \setminus X|.$$

La prédimension $\delta(\langle a\rangle/X, a) \leq 0$. Donc, par $(\star)$, on a

$$\begin{aligned} (a^1 \cap a^2) &\subseteq X, \\ \delta(\langle a\rangle/X, a) &= 0, \\ \dim_1(a/X, a^1) &= |a^2 \setminus X|, \quad \text{et} \\ \dim_2(a/X, a^2) &= |a^1 \setminus X|. \end{aligned}$$

Ceci entraîne que a^1 et a^2 sont i-indépendants pour chaque i au-dessus de X. De plus, comme l'uple $a^2 \setminus X$ est un uple de points 1-indépendants sur $X \cup a^1$, il suit que $X \cup a^1$ est autosuffisant dans $X \cup a$. Puisque $X \subseteq \langle a\rangle$ et $\delta(\langle a\rangle/X, a) = 0$, on a que $\langle a\rangle = X \cup a$, qui est autosuffisant. Donc $X \cup a^i$ est aussi autosuffisant pour $i = 1, 2$, ce qui entraîne que g^1 et g^2 sont indépendants.

Soit maintenant K_i la projection de K sur H_i. Le groupe K_i est aussi connexe et interprétable sur $\emptyset$. De plus, l'élément g^i est générique dans K_i. Puisque $g^1 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}\, g^2$, l'uple $g = (g^1, g^2)$ est alors générique dans $K_1 \times K_2$. Ainsi, l'indice de K dans $K_1 \times K_2$ est fini. Or, la connexité de chaque K_i donne celle de $K_1 \times K_2$, donc $K = K_1 \times K_2$.

Vérifions maintenant que $\dim(g^1) = \dim_1(g^1/\operatorname{acl}(\emptyset)$: comme $X \cup a^1$ est autosuffisant,

$$(X \cup a^1) \cap \operatorname{acl}(\emptyset) = X \qquad \text{et} \qquad a^1 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_X \operatorname{acl}(\emptyset),$$

on obtient que $\operatorname{acl}(\emptyset) \cup a^1$ est autosuffisant, et $a^1 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^2_X \operatorname{acl}(\emptyset)$. Ainsi $a^1 \setminus \operatorname{acl}(\emptyset)$ reste 2-indépendant sur $\operatorname{acl}(\emptyset)$, et $\dim(a^1) = \dim_1(a^1/X) = \dim_1(a^1/\operatorname{acl}(\emptyset))$.

Pour terminer, voyons que K_1 est T_1-interprétable. Puisque dans ce contexte, tout type sur un ensemble algébriquement clos est stationnaire, il suffit de montrer, par la proposition 1.8, que le type $\mathrm{tp}(g^1/\operatorname{acl}(\emptyset))$ est l'unique complétion de rang de Morley maximal du 1-type $\mathrm{tp}_1(g^1/\operatorname{acl}(\emptyset))$. Prenons (h, b) une réalisation de $\mathrm{tp}_1(g^1, a^1/\operatorname{acl}(\emptyset))$. Si $b \setminus \operatorname{acl}(\emptyset)$ n'est pas 2-indépendant sur $\operatorname{acl}(\emptyset)$, alors sa prédimension chute et le rang de Morley de h est strictement inférieur à celui de g^1. Sinon, les ensembles autosuffisants $\operatorname{acl}(\emptyset) \cup a^1$ et $\operatorname{acl}(\emptyset) \cup b$ sont isomorphes, et donc b et a ont le même type. Puisque g^1 est T_1-définissable sur a^1, il suit que h et g^1 ont également même type. □

Remarque 5.2. En particulier, tout sous-groupe interprétable connexe d'un groupe T_i-interprétable est également T_i-interprétable, et sa dimension est égale à sa i-dimension. Notons que l'égalité entre ces deux dimensions pour des ensembles T_i-interprétables apparaît dans [10, Theorem 2(i)].

La condition supplémentaire du théorème 1.10 est donc vérifiée dans ce cadre :

Lemme 5.3. *Si G est un groupe connexe définissable, alors pour tout homomorphisme définissable $\psi : G \to H$ sur un ensemble A algébriquement clos vers un groupe T_i-interprétable, on a $\dim_i(\psi(a)/A) \leq \dim(a/A)$, pour a un générique de G sur A. En particulier, il existe un tel homomorphisme avec $\dim_i(\psi(a)/A)$ maximal et fini.*

Démonstration. Notons que $\psi(G)$ est un sous-groupe interprétable connexe de H, et est donc T_i-interprétable, par la remarque précédente. Si a est générique dans G sur A, alors $\psi(a)$ est générique dans $\psi(G)$ sur A, et

$$\dim_i(\psi(a)/A) = \dim(\psi(a)/A) \leq \dim(a/A) \quad \square$$

La proposition suivante est évidente dans le cas d'une fusion collapsée.

Proposition 5.4. *Dans une fusion libre de deux théories fortement minimales avec la DMP au dessus de l'égalité, tout groupe définissable de dimension 0 est fini.*

Démonstration. Soit G un groupe connexe définissable sur $\emptyset$ de dimension 0. Sur un ensemble algébriquement clos de paramètres indépendants que l'on ajoute au langage, le théorème 1.10 et le lemme 5.3 donnent pour $k = 1, 2$ des morphismes interprétables $\phi_k : G \to H_k$ où H_k est T_k-interprétable, tels que pour deux génériques indépendants a et b on a

$$(\dagger) \qquad \operatorname{acl}(b), \operatorname{acl}(ab) \underset{\phi_k(a)}{\overset{k}{\perp\!\!\!\!\perp}} \operatorname{acl}(a).$$

Par la remarque 5.2, on peut supposer chaque morphisme surjectif en remplaçant H_k par $\phi_k(G)$. De plus, comme G est de dimension nulle, chaque H_k l'est aussi, donc $\phi_k(a)$ est k-algébrique. L'indépendance (†) donne ainsi

$$\langle b\rangle, \langle ab\rangle \overset{k}{\perp\!\!\!\!\perp} \langle a\rangle.$$

Comme a, b et ab sont deux à deux indépendants, on a

$$(\langle b\rangle \cup \langle ab\rangle) \cap \langle a\rangle = (\langle b\rangle \cap \langle a\rangle) \cup (\langle ab\rangle \cap \langle a\rangle) = \operatorname{acl}(\emptyset).$$

Par sous-modularité,

$$\delta(\langle a\rangle/\langle b\rangle \cup \langle ab\rangle) \leq \delta(\langle a\rangle/\operatorname{acl}(\emptyset)) = \dim(a/\operatorname{acl}(\emptyset)) = \dim(a) = 0.$$

Ainsi, puisque $\langle b, ab\rangle = \langle b\rangle \cup \langle ab\rangle$ est autosuffisant, l'ensemble

$$\langle b\rangle \cup \langle ab\rangle \cup \langle a\rangle$$

l'est aussi. La caractérisation de l'indépendance implique que

$$b, ab \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}\ a.$$

Donc a est algébrique, ce qui montre le résultat. $\square$

Grâce aux résultats précédents, nous sommes maintenant en mesure de montrer le théorème C de l'introduction : les groupes définissables dans la fusion sur l'égalité (libre ou collapsée) sont essentiellement des produits de groupes interprétables dans chacune des théories de base.

Théorème 5.5. *Tout groupe connexe définissable dans une fusion (libre ou collapsée) au-dessus de l'égalité de deux théories fortement minimales avec la DMP est, modulo un noyau fini, isomorphe à un produit de groupes interprétables dans chacune des théories.*

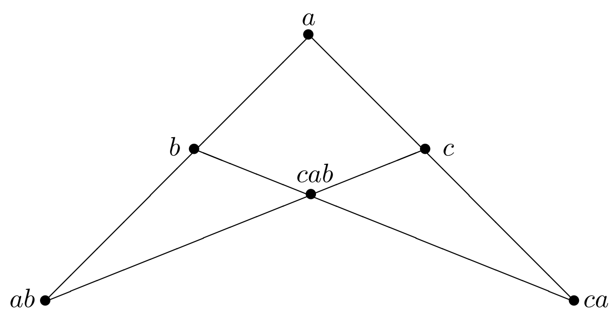
Démonstration. Soit G un groupe infini connexe T-définissable sur $\emptyset$. Sur un ensemble algébriquement clos de paramètres indépendants que l'on ajoute au langage, le théorème 1.10, la remarque 5.2 et le lemme 5.3 donnent des morphismes surjectifs interprétables $\phi_k : G \to H_k$ où H_k est T_k-interprétable, tels que pour deux génériques indépendants a et b on a

$$(\dagger) \qquad \operatorname{acl}(a), \operatorname{acl}(b) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{k}_{\phi_k(ab)} \operatorname{acl}(ab).$$

On pose $\phi = (\phi_1, \phi_2) : G \to H_1 \times H_2$. Comme ϕ_1 et ϕ_2 sont surjectifs et $\phi(G)$ est connexe, le lemme 5.1 donne que ϕ est également surjectif. De plus,

$$(\ddagger) \qquad \dim_1(\phi_1(a)) + \dim_2(\phi_2(a)) = \dim(\phi(a)) \leq \dim(a).$$

Considérons un troisième élément générique c indépendant de a, b, et le diagramme suivant :



De manière analogue au [11, Lemma 15], on considère des ensembles autosuffisants finiment engendrés :

$$\begin{aligned}
A_1 &= \langle a, \phi(a), b, \phi(b), ab, \phi(ab)\rangle \subseteq \mathrm{acl}(a, b, ab),\\
A_2 &= \langle a, \phi(a), c, \phi(c), ca, \phi(ca)\rangle \subseteq \mathrm{acl}(a, c, ca),\\
A_3 &= \langle ca, \phi(ca), cab, \phi(cab), b, \phi(b)\rangle \subseteq \mathrm{acl}(ca, cab, c),\\
A_4 &= \langle ab, \phi(ab), c, \phi(c), cab, \phi(cab)\rangle \subseteq \mathrm{acl}(ab, c, cab),\\
A_\emptyset &= \bigcup_{i=1}^{4} A_i, \quad \text{et} \quad A_s = \bigcap_{i\in s} A_i \quad \text{pour } s \subseteq \{1,2,3,4\}.
\end{aligned}$$

Alors les A_s sont des extensions finies de acl($\emptyset$), et

$$\begin{array}{ll}
\langle a, \phi(a)\rangle \subseteq A_{12} \subseteq \mathrm{acl}(a), & \langle b, \phi(b)\rangle \subseteq A_{13} \subseteq \mathrm{acl}(b),\\
\langle ab, \phi(ab)\rangle \subseteq A_{14} \subseteq \mathrm{acl}(ab), & \langle ca, \phi(ca)\rangle \subseteq A_{23} \subseteq \mathrm{acl}(ca),\\
\langle c, \phi(c)\rangle \subseteq A_{24} \subseteq \mathrm{acl}(c), & \langle cab, \phi(cab)\rangle \subseteq A_{34} \subseteq \mathrm{acl}(cab).
\end{array}$$

Notons que $A_s = \mathrm{acl}(\emptyset)$ pour $|s| \geq 3$, et

$$\begin{array}{ll}
\delta(A_\emptyset) \geq \dim(A_\emptyset) = 3\,\dim(a), & \\
\delta(A_i) = \dim(A_i) = 2\,\dim(a), & \text{pour } i \in \{1,2,3,4\}\\
\delta(A_{ij}) = \dim(A_{ij}) = \dim(a) & \text{pour } i \neq j,\\
\delta(A_s) = \dim(A_s) = 0 & \text{pour } |s| \geq 3.
\end{array}$$

Remarquons que :

$$(\star)\qquad \begin{aligned}
\dim(a) &= 3\,\dim(a) - 4\cdot 2\,\dim(a) + 6\,\dim(a)\\
&= \sum_{s\subseteq\{1,2,3,4\}} (-1)^{|s|}\dim(A_s) \leq \sum_{s\subset\{1,2,3,4\}} (-1)^{|s|}\delta(A_s)\\
&= \sum_{\substack{s\subseteq\{1,2,3,4\}\\ |s|\leq 2}} (-1)^{|s|}\dim_1(A_s) + \sum_{\substack{s\subseteq\{1,2,3,4\}\\ |s|\leq 2}} (-1)^{|s|}\dim_2(A_s),
\end{aligned}$$

où l'égalité finale provient de la modularité de la cardinalité.

Pour $k = 1$, 2, on obtient par sous-modularité :

$$\begin{aligned}
\dim_k(A_\emptyset) &= \dim_k(A_1) + \dim_k(A_2A_3A_4/A_1) \\
&\le \dim_k(A_1) + \dim_k(A_2A_3A_4/A_{12}A_{13}A_{14}) \\
&= \dim_k(A_1) + \dim_k(A_2A_3A_4) - \dim_k(A_{12}A_{13}A_{14}) \\
&= \dim_k(A_1) + \dim_k(A_2) + \dim_k(A_3A_4/A_2) - \dim_k(A_{12}A_{13}/A_{14}) \\
&\quad - \dim_k(A_{14}) \\
&\le \dim_k(A_1) + \dim_k(A_2) + \dim_k(A_3A_4/A_{23}A_{24}) - \dim_k(A_{12}A_{13}/A_{14}) \\
&\quad - \dim_k(A_{14}) \\
&= \dim_k(A_1) + \dim_k(A_2) + \dim_k(A_3A_4) - \dim_k(A_{23}A_{24}) \\
&\quad - \dim_k(A_{12}A_{13}/A_{14}) - \dim_k(A_{14}) \\
&= \dim_k(A_1) + \dim_k(A_2) + \dim_k(A_3) + \dim_k(A_4/A_3) - \dim_k(A_{23}A_{24}) \\
&\quad - \dim_k(A_{12}A_{13}/A_{14}) - \dim_k(A_{14}) \\
&\le \dim_k(A_1) + \dim_k(A_2) + \dim_k(A_3) + \dim_k(A_4/A_{34}) - \dim_k(A_{23}A_{24}) \\
&\quad - \dim_k(A_{12}A_{13}/A_{14}) - \dim_k(A_{14}) \\
&= \dim_k(A_1) + \dim_k(A_2) + \dim_k(A_3) + \dim_k(A_4) - \dim_k(A_{34}) \\
&\quad - \dim_k(A_{23}A_{24}) - \dim_k(A_{12}A_{13}/A_{14}) - \dim_k(A_{14}).
\end{aligned}$$

Comme $A_{23} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}\, A_{24}$ implique $A_{23} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^k A_{24}$, nous avons

$$\begin{aligned}
\dim_k(A_\emptyset) \le{}& \dim_k(A_1) + \dim_k(A_2) + \dim_k(A_3) + \dim_k(A_4) - \dim_k(A_{34}) \\
&- \dim_k(A_{14}) - \dim_k(A_{23}) - \dim_k(A_{24}) - \dim_k(A_{12}A_{13}/A_{14}).
\end{aligned}$$

En développant les séries alternées dans ($\star$), on obtient

$$\begin{aligned}
\dim(a) &\le \sum_{k=1}^{2} \big(\dim_k(A_{12}) + \dim_k(A_{13}) - \dim_k(A_{12}A_{13}/A_{14}) \big) \\
&= \Delta_1 + \Delta_2,
\end{aligned}$$

où $\Delta_k = \dim_k(A_{12}A_{13}) - \dim_k(A_{12}A_{13}/A_{14})$. Puisque $A_{12} \subseteq \operatorname{acl}(a)$, $A_{13} \subseteq \operatorname{acl}(b)$ et $A_{14} \subseteq \operatorname{acl}(ab)$, l'indépendance (†) donne

$$A_{12}A_{13} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^k_{\phi_k(ab)} A_{14}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\Delta_k &= \dim_k(A_{12}A_{13}) - \dim_k(A_{12}A_{13}/A_{14}) \\
&= \dim_k(A_{12}A_{13}) - \dim_k(A_{12}A_{13}/\phi_k(ab)) \\
&= \dim_k(\phi_k(ab)) - \dim_k(\phi_k(ab)/A_{12}A_{13}) \\
&= \dim_k(\phi_k(ab)),
\end{aligned}$$

car $\phi_k(ab) \in A_{14}$ est k-algébrique sur $\phi_k(a) \in A_{12}$ et $\phi_k(b) \in A_{13}$. D'où,

$$\dim(a) \le \Delta_1 + \Delta_2 = \dim_1(\phi_1(ab)) + \dim_2(\phi_2(ab)) = \dim_1(\phi_1(a)) + \dim_2(\phi_2(a)).$$

Ceci entraîne par l'inégalité (‡) que

$$\dim(a) = \dim(\phi(a)).$$

Comme $\phi(a)$ est algébrique sur a, on conclut que $\dim(a/\phi(a)) = 0$.

Or, l'élément a est générique dans $a \cdot \ker \phi$ sur son paramètre canonique, qui est $\phi(a)$. Comme la dimension ne dépend pas du translaté, le noyau de ϕ a dimension 0. Il est donc fini d'après la proposition 5.4. $\square$

Question. Peut-on aussi décrire les groupes interprétables dans la fusion au-dessus de l'égalité ?

Existe-t-il une caractérisation analogue pour les groupes définissables dans la fusion fortement minimale au-dessus d'un espace vectoriel sur un corps fini ?

Références

[1] J. T. Baldwin, K Holland, *Constructing ω-stable structures : Rank* 2 *fields*, J. Symb. Logic, **65**, 371-391 (2000).

[2] A. Baudisch, M. Hils, A. Martin-Pizarro, F. Wagner, *Die böse Farbe*, J. Inst. Math. Jussieu, **8**, 415-443 (2009).

[3] A. Baudisch, A. Martin-Pizarro, M. Ziegler, *Red fields*, J. Symb. Logic, **72**, 207–225 (2007).

[4] A. Baudisch, A. Martin-Pizarro, M. Ziegler, *Fusion over a vector space*, J. Math. Logic **6**, 141–162 (2006).

[5] A. Baudisch, A. Martin-Pizarro, M. Ziegler, *Hrushovski's fusion*, dans : *Algebra, logic, set theory*, 15–32, Stud. Log. 4, Coll. Publ. London (2007).

[6] T. Blossier, A. Martin-Pizarro, F. Wagner, *Géométries relatives*, J. Europ. Math. Soc., to appear. HAL-00514393.

[7] E. Bouscaren, *The Group Configuration–after E. Hrushovski*, dans : *The Model Theory of Groups*, 199–209, Notre Dame Math. Lectures 11, University of Notre Dame Press (1989).

[8] A. Hasson, *Some questions concerning Hrushovski's amalgamation constructions*, J. Inst. Math. Jussieu, **7**, 793–823 (2008).

[9] E. Hrushovski, *Contributions to stable model theory*, Ph.D. Thesis, Berkeley (1986).

[10] E. Hrushovski, *Strongly minimal expansions of algebraically closed fields*, Isr. J. Math., **79**, 129–151 (1992).

[11] E. Hrushovski, *A new strongly minimal set*, Ann. Pure Appl. Logic, **62**, 147–166 (1993).

[12] Y. Mustafin, Thèse de doctorat, Lyon (2003).

[13] A. Pillay, Geometric Stability Theory, Oxford Logic Guides, 33. *Oxford University Press* (1996).

[14] B. Poizat, Groupes Stables. Une tentative de conciliation entre la géométrie algébrique et la logique mathématique, *Nur al-Mantiq wal-Ma´rifah* (1987). Traduction anglaise : Stable groups. Mathematical Surveys and Monographs, 87. *Amer. Math. Soc.* (2001).

[15] B. Poizat, *Le carré de l'égalité*, J. Symb. Logic, **64**, 1339–1355 (1999).

[16] B. Poizat, *L'égalité au cube*, J. Symb. Logic, **66**, 1647–1676 (2001).

[17] B. Poizat, *Quelques modestes remarques à propos d'une conséquence inattendue d'un résultat surprenant de Monsieur Frank Olaf Wagner*, J. Symb. Logic, **66**, n^o 4, 1637–1646 (2001).

[18] F. O. Wagner, Stable groups, Lecture Notes of the London Mathematical Society 240. Cambridge University Press, 1997.

[19] F. O. Wagner, *Fields of finite Morley rank*, J. Symb. Logic, **66**, 703–706 (2001).

[20] F. O. Wagner, *Bad fields in positive characteristic*, Bull. London Math. Soc., **35**, 499–502 (2003).

[21] M. Ziegler, *A Note on generic Types*, unpublished, (2006), (`http://arxiv.org/math.LO/0608433`).

[22] M. Ziegler,*Fusion of structures of finite Morley rank*, dans : *Model theory with applications to algebra and analysis. Vol. 1*, London Math. Soc. Lecture Note Ser.,**349**, 225–248, Cambridge Univ. Press, (2008).

Université de Lyon ; CNRS ; Université Lyon 1 ; Institut Camille Jordan UMR5208, 43 boulevard du 11 novembre 1918, F–69622 Villeurbanne Cedex, France
E-mail address: blossier@math.univ-lyon1.fr
E-mail address: pizarro@math.univ-lyon1.fr
E-mail address: wagner@math.univ-lyon1.fr